

*Fare ricerca matematica è come cercare di farsi strada
per guadagnare la vetta di una grande montagna.*
Keith Devlin

A COSA SERVONO LE DISEQUAZIONI???

Allo studente di una seconda superiore che si trova per la prima volta ad avere a che fare con le disequazioni, questi astrusi metodi di calcolo potrebbero sembrare una cosa completamente inutile. Ma non è certo così. Basti pensare allo studio di funzione... Come a dire che uno studente di seconda superiore sa di cosa si sta parlando!

Ecco qua di seguito un esempio tra i più semplici, solo per mostrare quanto le disequazioni siano protagoniste nello studio di funzione¹. Anche se molte cose non si capiscono, può essere utile buttare uno sguardo nel futuro e vedere cosa ci aspetta.

Sia data la funzione: $y = \ln \frac{x+2}{x}$

1. Dominio: per determinare il dominio di questa funzione, bisogna imporre positivo l'argomento del logaritmo, cioè: $\frac{x+2}{x} > 0$. Risolvendo la [disequazione frazionaria](#) si ottiene: $x < -2 \vee x > 0$.

2. Per determinare le intersezioni con l'asse x , possiamo risolvere il [sistema](#) che ha come equazioni quella della funzione e quella dell'asse x :

$$\begin{cases} y = \ln \frac{x+2}{x} \\ y = 0 \end{cases}$$

Il sistema è impossibile, perciò non ci sono intersezioni con l'asse x .

Con l'asse y non ci sono intersezioni: lo sappiamo già, visto che l'asse y è escluso dal dominio della funzione.

3. Per determinare gli intervalli di positività della funzione, risolviamo la [disequazione logaritmica](#):

$\ln \frac{x+2}{x} \geq 0$, che si riduce alla soluzione della [disequazione frazionaria](#): $\frac{x+2}{x} \geq 1$, la cui soluzione è $x > 0$.

4. Dai limiti ai confini del campo di esistenza,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \ln \frac{x+2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{x+2}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{x+2}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x+2}{x} = 0$$

si deduce che la funzione ammette, come asintoti verticali, le rette di equazione: $x = -2$ e $x = 0$ e come asintoto orizzontale la retta $y = 0$, cioè l'asse x .

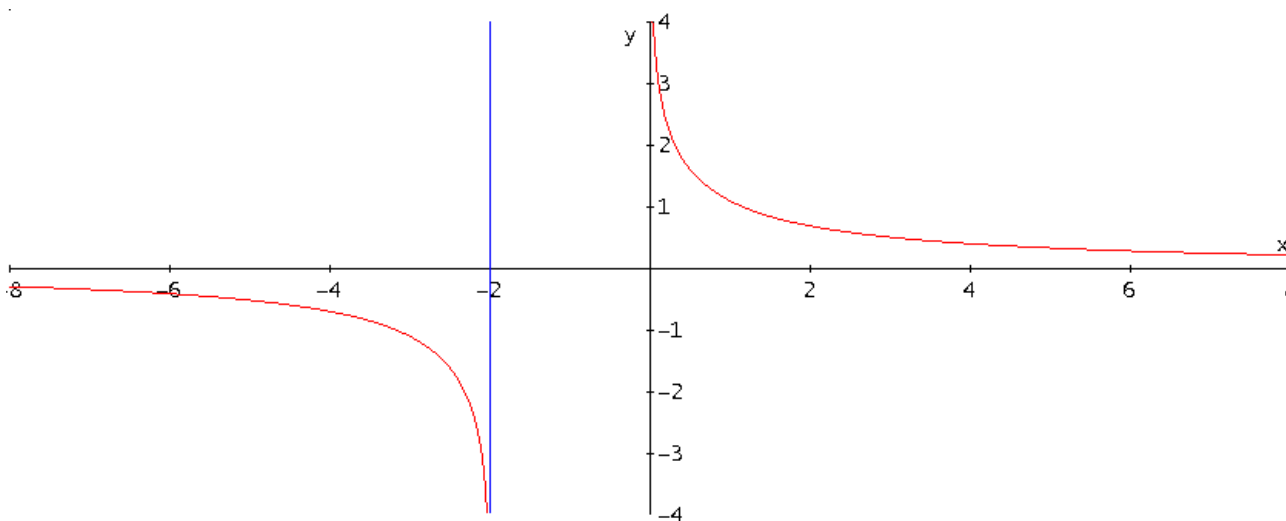
5. Derivando la funzione, si ottiene: $y' = -\frac{2}{x(x+2)}$. Per determinare i massimi e i minimi, si risolve la [disequazione](#)

[frazionaria](#): $-\frac{2}{x(x+2)} > 0$, che ha come soluzione $-2 < x < 0$. Perciò la funzione non ammette né massimi né

minimi ed è sempre decrescente.

¹ Per chi si domandasse a cosa serva lo studio di funzione, forse potrebbe essere utile rileggere (o leggere...) gli appunti sulle funzioni... In ogni caso, è utile ricordare che la matematica necessaria per fare la spesa la si impara alle elementari.

6. Calcolando la derivata seconda, si ottiene: $y'' = \frac{4(x+1)}{x^2(x+2)^2}$. Per determinare la concavità e gli eventuali flessi della funzione, si risolve la disequazione frazionaria: $\frac{4(x+1)}{x^2(x+2)^2} > 0$, che ha come soluzione: $x > -1$. Aggiungendo il dominio della funzione, la soluzione della disequazione diventa: $x > 0$.
Perciò la funzione ha concavità rivolta verso il basso per $x < -2$ e concavità rivolta verso l'alto per $x > 0$ e non ha punti di flesso.
7. A questo punto, possiamo disegnare il grafico della funzione:



La retta in blu costituisce l'asintoto verticale di equazione $x = -2$, mentre la funzione è rappresentata in rosso.