*L'essenza della matematica risiede nella sua libertà*
Georg Cantor

# LA TEORIA DEGLI INSIEMI NELLA STORIA

Siamo nell'era delle comunicazioni, che si svolgono ormai a svariati livelli: basta pensare agli sms, alle e-mail, al telefono, alla televisione, alla radio… Per comunicare abbiamo a disposizione diversi sistemi: possiamo comunicare con uno sguardo, con la postura del corpo, … ma soprattutto con il linguaggio, parlato e scritto. Attraverso il linguaggio parliamo di oggetti, persone, animali, luoghi, che vengono indicati con il loro nome, un "nome proprio": è già una prima forma di *simbolismo*, perché il nome evoca in me l'immagine dell'oggetto, della persona, dell'animale, del luogo che è stato nominato. Ma nella nostra vita ci sono troppe "cose" perché le possiamo indicare una per volta: spesso è necessario riferirsi ad esse attraverso delle categorie, ovvero attraverso "nomi comuni". Così, ad esempio, posso parlare dei compagni di scuola, dei gatti, dei luoghi di montagna… In questo modo, sto effettuando un'*astrazione*, visto che sto riconoscendo alcune caratteristiche comuni agli oggetti nominati e li sto *raggruppando* in base a queste loro proprietà. In altre parole, sto raccogliendo questi oggetti o questi individui in un unico ***insieme***: *L'importanza della teoria degli insiemi sta proprio qui: essa segue, sul piano delle "cose", lo sviluppo delle strutture linguistiche e delle strutture logiche*[1].

Il termine "insieme" è la parola chiave della matematica del XX secolo: prima del XIX secolo, la teoria degli insiemi era considerata qualcosa di intuitivo e generico, ma il contributo di Georg Cantor (1845-1918) ha permesso di rifondare l'intera matematica su di essi. Si è passati, successivamente, dalla teoria ingenua di Gottlob Frege (1848-1925) alla teoria assiomatica di Zermelo-Fraenkel, attraverso un lungo travaglio che ha modificato sensibilmente il modo di vedere la matematica.

Gottlob Frege, matematico e filosofo tedesco, è uno dei più grandi logici del nostro tempo. Con la sua rivoluzionaria opera *Begriffsschrift*, del 1879, voleva aprire una nuova era, rifondando la matematica sulla logica. La sua teoria ingenua degli insiemi si fonda su due principi:

- <u>principio di estensionalità</u>
  enunciato per la prima volta da Leibniz, secondo il quale due insiemi con gli stessi elementi sono uguali
- <u>principio di comprensione</u>
  secondo il quale ogni proprietà determina un insieme e ogni insieme è determinato da una proprietà

*La scoperta che su due principi così semplici e logicamente elementari si potesse fondare l'intera matematica, fu considerata il punto d'arrivo della sua storia*[2]. Ma la storia degli insiemi non finì qui.

Nel 1902 Bertrand Russell (1870-1972) scoprì che il principio di comprensione era contraddittorio. Il 16 giugno 1902, scrisse una lettera a Frege, con la quale lo informava della sua scoperta. Frege stava ormai ultimando la sua opera e rispose immediatamente, il 22 giugno: "*La sua scoperta della contraddizione mi ha causato la massima sorpresa e, direi quasi, costernazione, perché ha scosso le basi sulle quali intendevo costruire l'aritmetica*". Si può ben capire la disperazione di Frege: quel principio era uno dei cardini del lavoro di una vita, su di esso aveva basato l'intera matematica. Con un'apparentemente innocua lettera, Russell rimette in discussione tutto, proprio alla vigilia della pubblicazione. Il paradosso sarà di dominio pubblico nel 1903, quando verrà reso noto ne *I principi della matematica*, l'opera con la quale Russell si era illuso di poter salvare l'intera opera di Frege.

La contraddizione può essere espressa molto facilmente con il paradosso del barbiere, riformulazione dello stesso Russell. Leggiamolo nella versione di Beutelspacher:

> *C'era una volta un piccolo villaggio. Il barbiere di questo villaggio aveva appeso un cartello nel suo negozio in cui affermava di radere solo quelli che non si radevano da sé.*
> *Non era una pubblicità molto aggressiva: il barbiere, infatti, si contentava di radere quelli che non si facevano la barba da sé. E nessuno ci aveva mai trovato niente di strano, finché un bel giorno il suo figlioletto non gli fece la domanda fatale: "Ma* tu *ti puoi radere?"*
> *Il padre liquidò la domanda senza immaginare quel che si preparava: "Che domanda sciocca! Ma se mi rado due volte alla settimana!".*
> *Il figlio però lo interruppe, malandrino: "Quindi* non *sei uno di quelli che* non *si radono da sé?".*
> *"Eh?" fece il padre, che ovviamente non aveva ben capito. "Io* non *sono uno di quelli che* non*…, perché io mi… sì, è vero".*
> *"Per cui, secondo il tuo cartello, tu non puoi raderti!" osservò allora il figlio.*
> *A questo punto il padre, resosi conto di non poter liquidare la trovata del figlio tanto facilmente, montò su tutte le furie "Come sarebbe a dire, non posso…?"*
> *"Ma è chiaro" confermò il cliente che si trovava sotto il suo rasoio in quel momento. "Nel tuo cartello c'è scritto che radi solo quelli che non si radono da sé. Quindi non radi quelli che si radono da sé. Se però tu,*

[1] Francesco Speranza, *Matematica per gli insegnanti di matematica*, Zanichelli, Bologna 1992, pag. 17
[2] Piergiorgio Odifreddi, *La matematica del Novecento*, Einaudi, Torino 2000, pag. 11

*caro il mio barbiere, ti radi da te, allora il barbiere, cioè tu, non ti può radere!". Assaporato il trionfo, il cliente si alzò e se ne andò, lasciando di stucco il padre.*

A problemi simili, o uguali, erano pervenuti, indipendentemente, anche Cantor e Zermelo, ma l'impatto di Russell sulla teoria di Frege è dovuto al fatto che lui non la applicava più al linguaggio naturale, ma alla matematica. Siccome Cantor aveva riformulato la matematica in modo da fondarla solo sulla nozione di insieme, il paradosso di Russell minacciava la consistenza stessa della matematica!!!
Per risolvere il problema, fu necessario rimuovere il paradosso e limitare il principio di comprensione, distinguendo tra *insiemi* e *classi*, secondo il concetto per cui tutti gli insiemi sono classi, ma non tutte le classi sono insiemi. Per abbandonare la teoria ingenua, fu necessario affrontare un approccio dal basso, enunciando una lista di **assiomi** che definiscono gli insiemi e le operazioni che si possono effettuare su di essi. Nel 1908, Ernst Zermelo (1871-1953) preparò questa lista di assiomi e nel 1921 Abraham Fraenkel (1891-1965) la aggiornò, per questo motivo noi oggi parliamo della Teoria di Zermelo-Fraenkel. Nel corso del XX secolo, questa lista di assiomi fu costantemente aggiornata: *Qualunque estensione del sistema di Zermelo e Fraenkel è dunque destinata a essere provvisoria.*[3]

BIBLIOGRAFIA
Albrecht Beutelspacher, *Matematica da* tasca, Ponte alle grazie, Milano 2002
Piergiorgio Odifreddi, *La matematica del Novecento*, Einaudi, Torino 2000
Piergiorgio Odifreddi, *Le menzogne di Ulisse*, Longanesi, Milano 2004
Piergiorgio Odifreddi, *C'era una volta un paradosso*, Einaudi, Torino 2001
Francesco Speranza, *Matematica per gli insegnanti di matematica*, Zanichelli, Bologna 1992

[3] Piergiorgio Odifreddi, *La matematica del Novecento*, Einaudi, Torino 2000, pag. 14