1. Determina l'equazione della parabola passante per i punti A (1; 8) e B (–1; 10) e avente asse di simmetria $x = \frac{1}{10}$. Rappresentala.

La generica equazione della parabola è $y = ax^2 + bx + c$. Utilizzando l'equazione generica dell'asse di simmetria: $x = -\frac{b}{2a}$ e la sostituzione delle coordinate dei punti nell'equazione generica, ottengo il sistema:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{1}{10} \\ 8 = a + b + c \\ 10 = a - b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -5b \\ c = 8 - a - b = 8 + 4b \\ 10 = -5b - b + 8 + 4b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b = -2 \quad \Rightarrow \quad b = -1 \\ a = 5 \\ c = 4 \end{cases} \qquad y = 5x^2 - x + 4$$

2. Data la parabola di equazione $x = y^2 - 4y + 3$, determina l'equazione della retta ad essa tangente nel suo punto di ordinata 4.

Per ottenere le coordinate del punto della parabola di ordinata 4, sostituisco l'ordinata nell'equazione della parabola:

$$x = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 3 \qquad A\,(3;\,4)$$

Determino l'equazione della generica retta passante per A: $y - 4 = m(x - 3)$. Metto a sistema l'equazione della generica retta con l'equazione della parabola e pongo $\Delta = 0$ nella risolvente:

$$\begin{cases} y = mx - 3m + 4 \\ x = y^2 - 4y + 3 \end{cases} \qquad y = m(y^2 - 4y + 3) - 3m + 4$$

$$y = my^2 - 4my + 3m - 3m + 4 \qquad my^2 - y(1 + 4m) + 4 = 0$$

$$\Delta = (1 + 4m)^2 - 4m(4) = 0 \qquad 1 + 8m + 16m^2 - 16m = 0$$

$$16m^2 - 8m + 1 = 0 \qquad (4m - 1)^2 = 0 \qquad m = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} + 4 \qquad x - 4y + 13 = 0$$

3. Siano date la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$ e la retta $t: 3x + 4y - 52 = 0$.
– Verifica che retta e circonferenza sono tangenti nel punto A di ascissa 8.

Metto a sistema circonferenza e retta:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0 \\ 3x + 4y - 52 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0 \\ y = -\frac{3}{4}x + 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{39}{2}x + 169 - 10x + \frac{9}{2}x - 78 + 9 = 0 \\ y = -\frac{3}{4}x + 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{25}{16}x^2 - 25x + 100 = 0 \\ y = -\frac{3}{4}x + 13 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{1}{16}x^2 - x + 4 = 0 \qquad \begin{cases} \left(\frac{1}{4}x - 2\right)^2 = 0 \\ y = -\frac{3}{4}x + 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 7 \end{cases} \qquad \boxed{A\,(8;\,7)}$$

– Determina l'equazione della parabola che ha per vertice il centro C della circonferenza e che passa per A.

Il centro della circonferenza è $C\ (5;\,3)$. Sostituisco le generiche coordinate del centro e il passaggio per A:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 5 \\ 3 = 25a + 5b + c \\ 7 = 64a + 8b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -10a \\ 3 = 25a - 50a + c \\ 7 = 64a - 80a + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -10a \\ 3 = -25a + c \\ 7 = -16a + c \quad \Rightarrow \quad c = 16a + 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 = -25a + 16a + 7 \\ b = -10a \\ c = 16a + 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{4}{9} \\ b = -\frac{40}{9} \\ c = \frac{127}{9} \end{cases}$$

$$\boxed{y = \frac{4}{9}x^2 - \frac{40}{9}x + \frac{127}{9}}$$

– Determina perimetro e area del triangolo ABC, essendo B il punto della retta t di ascissa 4.

Determino innanzi tutto le coordinate di B, sostituendo l'ascissa 4 nell'equazione della retta t:

$$3 \cdot 4 + 4y - 52 = 0 \qquad 4y = 40 \qquad \boxed{B\,(4;\,10)}$$

Il triangolo ABC è un triangolo rettangolo. Determino le misure dei singoli lati:

$$\overline{AB} = \sqrt{(8-4)^2 + (7-10)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(5-4)^2 + (3-10)^2} = \sqrt{1+49} = 5\sqrt{2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(8-5)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} = \frac{5 \cdot 5}{2} = \boxed{\frac{25}{2}} \qquad \boxed{2p = 10 + 5\sqrt{2}}$$