1. Determina l'equazione della parabola passante per i punti A (1; 10) e B (–1; 8) e avente asse di simmetria $x = -\frac{1}{10}$. Rappresentala.

La generica equazione della parabola è $y = ax^2 + bx + c$. Utilizzando l'equazione generica dell'asse di simmetria: $x = -\frac{b}{2a}$ e la sostituzione delle coordinate dei punti nell'equazione generica, ottengo il sistema:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{10} \\ 10 = a + b + c \\ 8 = a - b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 5b \\ c = 10 - a - b = 10 - 6b \\ 8 = 5b - b + 10 - 6b \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b = 2 \quad \Rightarrow \quad b = 1 \\ a = 5 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$y = 5x^2 + x + 4$$

2. Data la parabola di equazione $x = y^2 + 4y + 3$, determina l'equazione della retta ad essa tangente nel suo punto di ordinata – 4.

Per ottenere le coordinate del punto della parabola di ordinata – 4, sostituisco l'ordinata nell'equazione della parabola:

$$x = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 3 \qquad A\,(3; -4)$$

Determino l'equazione della generica retta passante per A: $y + 4 = m\,(x - 3)$. Metto a sistema l'equazione della generica retta con l'equazione della parabola e pongo $\Delta = 0$ nella risolvente:

$$\begin{cases} y = mx - 3m - 4 \\ x = y^2 + 4y + 3 \end{cases} \qquad y = m\,(y^2 + 4y + 3) - 3m - 4$$

$$y = my^2 + 4my + 3m - 3m - 4 \qquad m\,y^2 - y\,(1 - 4m) - 4 = 0$$

$$\Delta = (1 - 4m)^2 - 4m\,(-4) = 0 \qquad 1 - 8m + 16m^2 + 16m = 0$$

$$16m^2 + 8m + 1 = 0 \qquad (4m + 1)^2 = 0 \qquad m = -\frac{1}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} - 4 \qquad x + 4y + 13 = 0$$

3. Siano date la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$ e la retta $t: 3x - 4y + 22 = 0$.
– Verifica che retta e circonferenza sono tangenti nel punto A di ascissa 2.

Metto a sistema circonferenza e retta:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0 \\ 3x - 4y + 22 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0 \\ y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{33}{4}x + \frac{121}{4} - 10x - \frac{9}{2}x - 33 + 9 = 0 \\ y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{25}{16}x^2 - \frac{25}{4}x + \frac{25}{4} = 0 \\ y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = 0 \qquad \begin{cases} \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \\ y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 7 \end{cases} \qquad \boxed{A\,(2;\,7)}$$

– Determina l'equazione della parabola che ha per vertice il centro C della circonferenza e che passa per A.

Il centro della circonferenza è $C\ (5;\,3)$. Sostituisco le generiche coordinate del centro e il passaggio per A:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 5 \\ 3 = 25a + 5b + c \\ 7 = 4a + 2b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -10a \\ 3 = 25a - 50a + c \\ 7 = 4a - 20a + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -10a \\ 3 = -25a + c \\ 7 = -16a + c \quad \Rightarrow \quad c = 16a + 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 = -25a + 16a + 7 \\ b = -10a \\ c = 16a + 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{4}{9} \\ b = -\frac{40}{9} \\ c = \frac{127}{9} \end{cases}$$

$$\boxed{y = \frac{4}{9}x^2 - \frac{40}{9}x + \frac{127}{9}}$$

– Determina perimetro e area del triangolo ABC, essendo B il punto della retta t di ascissa 6.

Determino innanzi tutto le coordinate di B, sostituendo l'ascissa 4 nell'equazione della retta t:

$$3 \cdot 6 - 4y + 22 = 0 \qquad 4y = 40 \qquad \boxed{B\,(6;\,10)}$$

Il triangolo ABC è un triangolo rettangolo. Determino le misure dei singoli lati:

$$\overline{AB} = \sqrt{(6-2)^2 + (10-7)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(5-6)^2 + (3-10)^2} = \sqrt{1+49} = 5\sqrt{2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(2-5)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} = \frac{5 \cdot 5}{2} = \boxed{\frac{25}{2}} \qquad \boxed{2p = 10 + 5\sqrt{2}}$$