

1. Calcola il numero di abbinamenti possibili indicati di seguito:

- A. Tra tutti i numeri di 9 cifre diverse tra loro e diverse da zero, quanti sono quelli le cui prime due sono, nell'ordine, 5 e 2?  
 B. Tra tutti i numeri di 10 cifre tutte diverse tra loro, quanti sono i multipli di 10?  
 C. Tra tutti i numeri che possiamo formare con le cifre del numero 4 550 444 quanti sono i multipli di 10? E i numeri pari?  
 D. Determina in quanti modi diversi possono essere sistemati in un ripiano della libreria 7 libri scelti tra i 20 di cui si dispone.  
 E. Quanti numeri di 3 cifre, tutte dispari, si possono scrivere?  
 F. Quanti sono i numeri di 6 cifre di cui le prime tre dispari e le restanti pari?  
 G. Dodici amici, dopo aver partecipato a una cena, si salutano e ognuno stringe la mano a tutti gli altri. Quante sono le strette di mano?  
 H. Calcola il numero dei lati di un poligono convesso avente 90 diagonali.

- A. Considerato che le prime due posizioni sono bloccate dal 5 e dal 2, restano 7 posizioni disponibili. Applico perciò la formula della permutazione semplice, considerato che nella terza posizione ho 7 possibilità di scelta, nella quarta 6, nella quinta 5 e così via...

$$P_7 = 7! = \mathbf{5040}$$

- B. Si tratta di una situazione analoga alla precedente, ma con lo 0 come ultima cifra e 9 posizioni libere, perciò applico la formula della permutazione semplice, considerato che nella prima posizione ho 9 possibilità di scelta, nella seconda 8 e così via...

$$P_9 = 9! = \mathbf{362\ 880}$$

- C. Bloccando l'ultima cifra con lo 0, per ottenere i multipli di 10, mi restano 6 posizioni disponibili, in cui posso avere una ripetizione (visto che il 5 compare due volte e il 4 quattro volte):

$$P_6^{(2,4)} = \frac{6!}{2!4!} = \mathbf{15}$$

Per i numeri pari, invece, devo considerare i multipli di 10, che sono 15, e quelli che ottengo con 4 come ultima cifra, ovvero 15 per ognuno di essi, che sommati sono 75. In altre parole:

$$P_6^{(2,4)} + P_6^{(2,3)} = \frac{6!}{2!4!} + \frac{6!}{2!3!} = \mathbf{75}$$

- D. Si tratta di una disposizione semplice, visto che ho 7 posizioni a disposizione e 20 possibilità diverse di riempirle:

$$D_{20,7} = \frac{20!}{(20-7)!} = \frac{20!}{13!} = \mathbf{390\ 700\ 800}$$

- E. Ho 5 cifre a disposizione e 3 posizioni diverse ed eventualmente le cifre si possono ripetere, perciò è una disposizione con ripetizione:

$$D'_{5,3} = 5^3 = \mathbf{125}$$

- F. Si tratta di due disposizioni con ripetizione distinte: la prima sulle prime 3 posizioni e la seconda sulle altre tre:

$$D'_{5,3} \cdot D'_{5,3} = 5^3 \cdot 5^3 = \mathbf{15\ 625}$$

- G. Si tratta di una combinazione semplice:

$$C_{12,2} = \binom{12}{2} = \frac{12!}{2!10!} = \mathbf{66}$$

- H. Dalla combinazione semplice dei punti tra di loro, devo togliere gli n lati:

$$C_{n,2} - n = \binom{n}{2} - n = \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2} = 90$$

$$n^2 - 3n - 180 = 0 \quad n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 729}}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 15 \\ -12 \end{array} \right.$$

In altre parole, il poligono con 90 diagonali ha **15** lati.

2. Risolvi l'equazione:  $4 \binom{x}{4} = 15 \binom{x-2}{3}$ . [Esame di stato liceo scientifico, 2007 – Sessione ordinaria]

$$4 \frac{x!}{4!(x-4)!} = 15 \frac{(x-2)!}{3!(x-5)!} \quad C.A.: x \geq 5$$

$$4 \cdot \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)!}{4 \cdot 3!(x-4)!} = 15 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)!}{3 \cdot 2(x-5)!}$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{3!} = 5 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{2} \quad \text{posso semplificare } (x-2)(x-3) \text{ perché per le C.A.: } x \geq 5$$

$$\frac{x(x-1)}{3} = 5(x-4) \quad x^2 - x - 15x + 60 = 0 \quad x^2 - 16x + 60 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 60}}{1} = \left\langle \begin{array}{l} 10 \\ 6 \end{array} \right.$$

3. Enuncia e dimostra la formula di Stifel per i coefficienti binomiali.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$

$$\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{k(k-1)!(n-1-k)!}$$

Semplificando i termini indicati con lo stesso colore, otteniamo:

$$\frac{n}{k(n-k)} = \frac{1}{(n-k)} + \frac{1}{k}$$

$$\frac{n}{k(n-k)} = \frac{k+n-k}{k(n-k)} \quad \frac{n}{k(n-k)} = \frac{n}{k(n-k)} \quad \text{c. v. d.}$$

4. Qual è il sesto termine dello sviluppo di  $(x + \frac{1}{3}y^2)^9$ ?

Consideriamo la formula del binomio di Newton

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

Per avere il sesto termine devo scegliere il termine per  $k = 5$ :

$$\binom{9}{5} x^4 \left(\frac{1}{3}y^2\right)^5 = \frac{9!}{5!4!} x^4 \frac{1}{3^5} y^{10} = \frac{14}{27} x^4 y^{10}$$

5. Un'urna contiene 3 gettoni blu, 4 rossi, 5 verdi, 2 bianchi e 6 viola. Si estrae un gettone; calcola la probabilità che sia:

A. Blu oppure bianco

B. Né bianco né viola

C. Verde oppure blu

$$p(\text{blu}) = \frac{3}{20} \quad p(\text{rosso}) = \frac{4}{20} \quad p(\text{verde}) = \frac{5}{20} \quad p(\text{bianco}) = \frac{2}{20} \quad p(\text{viola}) = \frac{6}{20}$$

$$A. \quad p(\text{blu} \cup \text{bianco}) = p(\text{blu}) + p(\text{bianco}) = \frac{3}{20} + \frac{2}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$B. \quad 1 - p(\text{bianco} \cup \text{viola}) = 1 - p(\text{bianco}) - p(\text{viola}) = 1 - \frac{2}{20} - \frac{6}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$C. \quad p(\text{verde} \cup \text{blu}) = p(\text{verde}) + p(\text{blu}) = \frac{5}{20} + \frac{3}{20} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

6. Si estrae una carta da un mazzo di 52. Calcola la probabilità che sia o una figura, o un tre, o una carta di picche.

$$p(F) = \frac{12}{52} \quad p(3) = \frac{4}{52} \quad p(\text{picche}) = \frac{13}{52} \quad p(3 \cap \text{picche}) = \frac{1}{52} \quad p(F \cap \text{picche}) = \frac{3}{52}$$

$$p(F \cup 3 \cup \text{picche}) = p(F) + p(3) + p(\text{picche}) - p(3 \cap \text{picche}) - p(F \cap \text{picche}) = \frac{12}{52} + \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} - \frac{3}{52} = \frac{25}{52}$$

7. Calcola la probabilità che, estraendo una carta da un mazzo di 40, questa sia un asso, sapendo che non è una figura.

$$p(F) = \frac{12}{40} \quad p(\bar{F}) = \frac{28}{40} \quad p(A) = \frac{4}{40} \quad p(A \cap \bar{F}) = \frac{4}{40} \quad p(A|\bar{F}) = ?$$

$$p(A|\bar{F}) = \frac{p(A \cap \bar{F})}{p(\bar{F})} = \frac{\frac{4}{40}}{\frac{28}{40}} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$$

8. Un'urna contiene 45 palline di cui 15 bianche, 15 blu e 15 verdi. Un'altra urna contiene 65 palline di cui 10 bianche, 25 blu e 30 verdi. Estraendo una pallina da ciascuna urna, calcola la probabilità che:

A. Siano entrambe verdi

B. Nessuna sia verde

$$p(Bi1) = \frac{15}{45} \quad p(B1) = \frac{15}{45} \quad p(V1) = \frac{15}{45} \quad p(Bi2) = \frac{10}{65} \quad p(B2) = \frac{25}{65} \quad p(V2) = \frac{30}{65}$$

$$p(V1 \cap V2) = p(V1)p(V2) = \frac{15}{45} \cdot \frac{30}{65} = \frac{2}{13} \quad p(\bar{V1} \cap \bar{V2}) = p(\bar{V1})p(\bar{V2}) = (1 - p(V1))(1 - p(V2)) = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{13} = \frac{14}{39}$$

9. In una scuola il 40% degli studenti sono maschi e il 60% femmine. Il 25% delle femmine porta la gonna mentre il 75% ha i pantaloni. Un osservatore da lontano vede uscire uno studente con i pantaloni. Qual è la probabilità che sia una femmina?

$$p(M) = \frac{40}{100} \quad p(F) = \frac{60}{100} \quad p(G|F) = \frac{25}{100} \quad p(P|F) = \frac{75}{100} \quad p(P|M) = 1$$

Per la soluzione uso la formula di Bayes:

$$p(F|P) = \frac{p(P|F)p(F)}{p(P|F)p(F) + p(P|M)p(M)} = \frac{\frac{75}{100} \cdot \frac{60}{100}}{\frac{75}{100} \cdot \frac{60}{100} + \frac{100}{100} \cdot \frac{40}{100}} = \frac{9}{9 + 8} = \frac{9}{17}$$

10. In una fabbrica meccanica vi sono due macchinari che producono viti dello stesso tipo. Il primo macchinario produce lo 0,5% di viti difettose, il secondo produce lo 0,3% di viti difettose. I due macchinari contribuiscono rispettivamente per il 60% e per il 40% alla produzione complessiva. Calcola la probabilità che una vite scelta a caso sia difettosa.

$$p(U1) = \frac{60}{100} \quad p(U2) = \frac{40}{100} \quad p(D|U1) = \frac{0,5}{100} \quad p(D|U2) = \frac{0,3}{100} \quad p(D) = ?$$

$$p(D) = p(D|U1)p(U1) + p(D|U2)p(U2) = \frac{0,5}{100} \cdot \frac{60}{100} + \frac{0,3}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{30 + 12}{10\,000} = \frac{21}{5\,000}$$