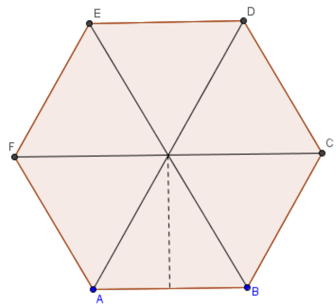
1. Sia dato un prisma di base esagonale di area totale $\left(18\sqrt{3}+108\right)\ cm^2$. Sapendo che lo spigolo di base è la terza parte dell'altezza, determina il volume del prisma. Determina inoltre la diagonale e l'area totale di un cubo con lo spigolo congruente allo spigolo di base del prisma.

Indico con x la misura dello spigolo di base e con 3x la misura dell'altezza.
Esprimo quindi l'area totale del prisma in funzione dello spigolo di base e dell'altezza, tenuto conto che anche l'apotema della base esagonale si può esprimere in funzione di x. Infatti, l'esagono è costituito da 6 triangoli equilateri di lato x, perciò:



$$a=\sqrt{x^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=x\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A_t=6x\cdot x\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2+6x\cdot 3x=18\sqrt{3}+108$$

$$3\sqrt{3}\,x^2+18x^2=6\left(3\sqrt{3}+18\right)\qquad\qquad x^2=6$$

In altre parole, lo spigolo di base del prisma vale $\boldsymbol{\sqrt{6}\ cm}$, perciò possiamo determinarne il volume:

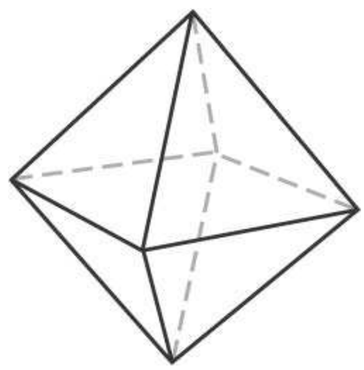
$$V=6\sqrt{6}\ cm\ \cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{6}\ cm\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{6}\ cm=\mathbf{81\sqrt{2}\ cm^3}$$

Se lo spigolo di un cubo è $\sqrt{6}\ cm$, posso calcolarne la diagonale: $d=d\sqrt{3}=\mathbf{3\sqrt{2}\ cm}$

E determinare l'area totale, moltiplicando per 6 l'area di una singola faccia: $A_t=6\cdot\left(\sqrt{6}\ cm\right)^2=\mathbf{36\ cm^2}$

2. Determina lo spigolo di un ottaedro di volume $6\sqrt{2}\ cm^3$.

Se indico con 2x lo spigolo di base, l'altezza della singola faccia, ovvero l'apotema, è $x\sqrt{3}$, perciò posso determinare l'altezza della piramide superiore (che sarà uguale all'altezza di quella inferiore), con il teorema di Pitagora:



$$H=\sqrt{\left(x\sqrt{3}\right)^2-x^2}=x\sqrt{2}$$

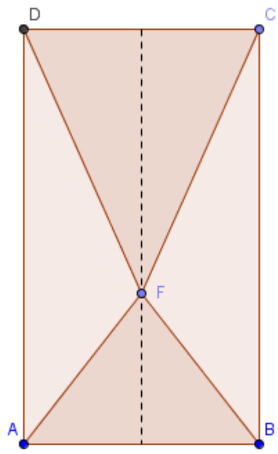
Possiamo in questo modo determinare il volume in funzione dello spigolo:

$$V=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot(2x)^2\cdot x\sqrt{2}=6\sqrt{2}$$

$$8x^3=18\qquad\qquad x^3=\frac{18}{8}\qquad\qquad x=\frac{\sqrt[3]{18}}{2}$$

Ovvero, lo spigolo dell'ottaedro è: $\mathbf{\sqrt[3]{18}\ cm}$.

3. In un cilindro il rapporto fra il quadruplo del raggio di base e l'altezza è pari al semiperimetro di base. Determina sull'asse un punto P tale che sia pari a 2/5 il rapporto fra i volumi dei due coni aventi per basi le basi del cilindro e per vertice il punto P.



Innanzi tutto, se il rapporto tra il quadrupolo del raggio di base e l'altezza è pari al semiperimetro di base, otteniamo:

$$\frac{4r}{h}=\pi r\qquad\Rightarrow\qquad h=\frac{4}{\pi}$$

I volumi dei due coni sono:

$$V_1=\frac{1}{3}h_1\,A_b\qquad V_2=\frac{1}{3}(h-h_1)\,A_b$$

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}h_1\,A_b}{\frac{1}{3}(h-h_1)\,A_b}=\frac{h_1}{h-h_1}=\frac{2}{5}\qquad\qquad 5h_1=2h-2h_1\qquad\qquad h_1=\frac{2}{7}h=\mathbf{\frac{8}{7\pi}}$$

Oppure $h_1=h-\frac{2}{7}h=\frac{5}{7}h=\mathbf{\frac{20}{7\pi}}$

4. Determina il dominio delle seguenti funzioni:

$$y = \sqrt{3x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+4}} \qquad y = \frac{x^2-4}{4^{x+4}-2}$$

$$y = \ln\frac{3x}{x+2} \qquad y = \frac{5x-2}{2\log_3 x - 1}$$

$$y = tg\left(5x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad y = \frac{4x}{\sqrt{\sqrt{5x^2-4}-x}}$$

$$y = \sqrt{3x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+4}}$$

$$\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ x+4 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x > -4 \end{cases} \qquad \boldsymbol{x \geq -\frac{1}{3}}$$

$$y = \ln\frac{3x}{x+2}$$

$$\frac{3x}{x+2} > 0 \qquad \begin{matrix} N>0:\ x>0 \\ D>0:\ x>-2 \end{matrix} \qquad \boldsymbol{x < -2 \ \vee \ x > 0}$$

$$y = tg\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$5x + \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \boldsymbol{x \neq \frac{k}{5}\pi}$$

$$y = \frac{x^2-4}{4^{x+4}-2}$$

$$4^{x+4} - 2 \neq 0 \qquad 4^{x+4} \neq 2 \qquad 2^{2(x+4)} \neq 2^1 \qquad 2\,(x+4) \neq 1 \qquad \boldsymbol{x \neq -\frac{7}{2}}$$

$$y = \frac{5x-2}{2\log_3 x - 1}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 2\log_3 x - 1 \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x \neq 1/2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \sqrt{3} \end{cases} \qquad \boldsymbol{x > 0 \ \wedge \ x \neq \sqrt{3}}$$

$$y = \frac{4x}{\sqrt{\sqrt{5x^2-4}-x}}$$

$$\sqrt{5x^2-4} - x > 0$$

$$\begin{cases} 5x^2-4 > x^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 5x^2-4 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 > 4 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} 5x^2 \geq 4 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -1 \ \vee \ x > 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \leq -\frac{2\sqrt{5}}{5} \ \vee \ x \geq \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x \leq -\frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \vee \quad x > 1}$$