

1. Determina l'equazione della funzione omografica passante per i punti $A(3; -11)$ e $B(2; -4)$ e con asintoto verticale $x = 4$.

Considerata la funzione omografica: $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, con asintoto verticale $x = -\frac{d}{c}$, procedo raccogliendo c sia a numeratore che a denominatore:

$$y = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} \quad \text{sostituendo } -\frac{d}{c} = 4 \quad y = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x - 4}$$

Per determinare gli ultimi parametri, impongo il passaggio dell'iperbole per i punti A e B, sostituendo le loro coordinate nell'espressione della funzione e risolvendo poi il sistema:

$$\begin{cases} -11 = \frac{3\frac{a}{c} + \frac{b}{c}}{3 - 4} \\ -4 = \frac{2\frac{a}{c} + \frac{b}{c}}{2 - 4} \end{cases} \quad \begin{cases} 3\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 11 \\ 2\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 8 \\ \frac{a}{c} = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a}{c} = 3 \\ \frac{b}{c} = 2 \end{cases}$$

Perciò l'equazione dell'iperbole è:

$$y = \frac{3x + 2}{x - 4}$$

2. Trova l'equazione dell'ellisse che ha un vertice di coordinate $(3; 0)$ e il fuoco sull'asse x di ascissa positiva distante $\sqrt{10}$ dalla retta di equazione $3x - y + 4 = 0$.

Il fuoco dell'ellisse ha coordinate: $F(c; 0)$. Pongo la sua distanza dalla retta data uguale a $\sqrt{10}$:

$$\frac{|3c + 4|}{\sqrt{9 + 1}} = \sqrt{10} \quad |3c + 4| = 10$$

Da cui ricaviamo due equazioni:

$$\begin{aligned} 3c + 4 = 10 & \quad c = 2 \\ 3c + 4 = -10 & \quad c = -\frac{14}{3} \quad \text{non accettabile} \end{aligned}$$

Perciò dell'ellisse conosco:

$$a = 3 \quad c = 2 \quad a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 5$$

L'equazione dell'ellisse è:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$$

3. Determina e rappresenta il luogo geometrico dei punti del piano per i quali la differenza delle distanze dai punti $F_1(0; 2)$, $F_2(6; 2)$ è uguale a 4.

Il luogo geometrico richiesto è un'iperbole con centro di simmetria dato dal punto medio del segmento F_1F_2 . Determino perciò l'iperbole di centro O , di cui conosco la distanza focale e l'asse trasverso, con i fuochi sull'asse x :

$$2c = F_1F_2 = 6 \quad 2a = 4 \quad a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 5$$

L'iperbole di centro O ha equazione:

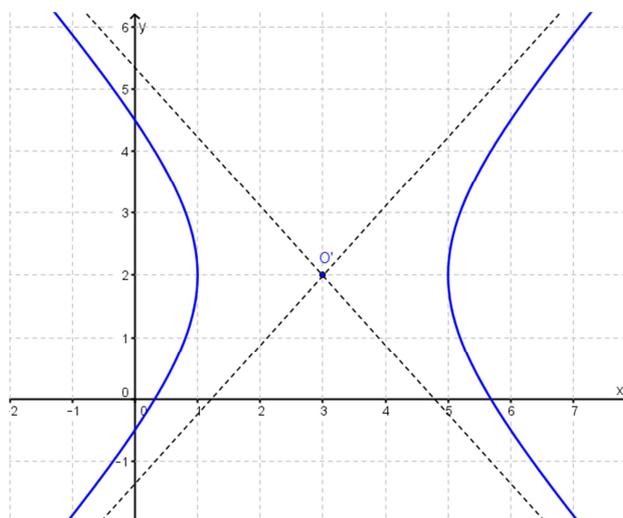
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

A questo punto, conoscendo il centro di simmetria del luogo richiesto $O'(3; 2)$, traslo l'iperbole in modo che abbia centro coincidente con quello dato:

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1 \quad \mathbf{5x^2 - 4y^2 - 30x + 16y + 9 = 0}$$

In alternativa, posso determinare l'equazione richiesta applicando la definizione di luogo geometrico, ovvero:

$$\begin{aligned} PF_1 - PF_2 &= 4 \\ \sqrt{x^2 + (y-2)^2} - \sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} &= 4 \\ \left(\sqrt{x^2 + (y-2)^2}\right)^2 &= \left(\sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} + 4\right)^2 \\ x^2 + y^2 - 4y + 4 &= x^2 - 12x + 36 + y^2 - 4y + 4 + 16 + 8\sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} \\ 12x - 52 &= 8\sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} \\ (3x - 13)^2 &= \left(2\sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2}\right)^2 \\ 9x^2 + 169 - 78x &= 4x^2 - 48x + 144 + 4y^2 - 16y + 16 \\ \mathbf{5x^2 - 4y^2 - 30x + 16y + 9} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$



4. Determina l'equazione dell'iperbole di fuoco $(0; \frac{\sqrt{5}}{2})$ e tangente alla retta $2x - 6y + 5 = 0$.

Conoscendo il fuoco dell'iperbole, so che: $a^2 + b^2 = \frac{5}{4}$. Impongo la condizione di tangenza, data l'iperbole generica, ponendo $\Delta=0$ nella risolvante del seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \\ 2x - 6y + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{\frac{5}{4} - b^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \\ x = 3y - \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\frac{9y^2 - 15y + \frac{25}{4}}{\frac{5}{4} - b^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad \frac{36y^2 - 60y + 25}{5 - 4b^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

$$36b^2y^2 - 60b^2y + 25b^2 - 5y^2 + 4b^2y^2 + 5b^2 - 4b^4 = 0$$

$$y^2(40b^2 - 5) - 60b^2y - 4b^4 + 30b^2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 30^2b^4 + (40b^2 - 5)(4b^4 - 30b^2) = 0$$

$$30^2b^4 + 10b^2(8b^2 - 1)(2b^2 - 15) = 0$$

$$90b^2 + 16b^4 - 120b^2 - 2b^2 + 15 = 0$$

$$16b^4 - 32b^2 + 15 = 0$$

$$b^2 = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 16 \cdot 15}}{16} = \frac{4 \pm 1}{4} = \begin{cases} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 = \frac{5}{4} \\ a^2 = \frac{5}{4} - b^2 = 0 \end{cases} \quad \text{non accettabile}$$

$$\begin{cases} b^2 = \frac{3}{4} \\ a^2 = \frac{5}{4} - b^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \frac{x^2}{\frac{1}{2}} - \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = -1 \qquad 2x^2 - \frac{4}{3}y^2 = -1 \qquad \mathbf{4y^2 - 6x^2 = 3}$$

5. Nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$, siano AB l'asse maggiore, O il suo centro e F il fuoco di ordinata positiva. Sia P il punto dell'ellisse di ordinata 3 del primo quadrante e sia CD una corda passante per O parallela alla tangente all'ellisse in P. La retta PF e la retta CD si incontrano in Q. Determina il rapporto fra le lunghezze di PQ e OA.

Dall'equazione dell'ellisse ricavo:

$$A(0, -5) \quad B(0, 5) \quad F(0, 4)$$

Ricavo le coordinate di P, sostituendo l'ordinata 3 nell'equazione dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{9}{25} = 1 \quad \frac{x^2}{9} = \frac{16}{25} \quad x = \pm \frac{12}{5}$$

Il punto P ha coordinate $P\left(\frac{12}{5}, 3\right)$.

Determino la tangente in P con la formula dello sdoppiamento:

$$\frac{12}{5} \cdot \frac{1}{9}x + \frac{3}{25}y = 1 \quad 20x + 9y = 75$$

Perciò la retta passante per O e parallela alla tangente all'ellisse in P ha equazione: $y = -\frac{20}{9}x$.

Determino l'equazione della retta PF:

$$\frac{x-0}{\frac{12}{5}-0} = \frac{y-4}{3-4} \quad \frac{5}{12}x = -y+4 \quad y = -\frac{5}{12}x+4$$

Determino l'intersezione tra la retta CD e la retta PF

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{12}x + 4 \\ y = -\frac{20}{9}x \end{cases} \quad \frac{20}{9}x - \frac{5}{12}x = -4 \quad 80x - 15x = -144 \quad x = -\frac{144}{65}$$

Perciò il punto Q ha coordinate:

$$Q\left(-\frac{144}{65}; \frac{64}{13}\right)$$

Posso calcolare il rapporto richiesto:

$$\frac{PQ}{OA} = \frac{\sqrt{\left(\frac{12}{5} + \frac{144}{65}\right)^2 + \left(3 - \frac{64}{13}\right)^2}}{5} = \frac{\sqrt{\left(\frac{300}{65}\right)^2 + \left(\frac{25}{13}\right)^2}}{5} = \frac{\frac{5}{13}\sqrt{12^2 + 5^2}}{5} = \frac{5 \cdot 13}{5 \cdot 13} = 1$$

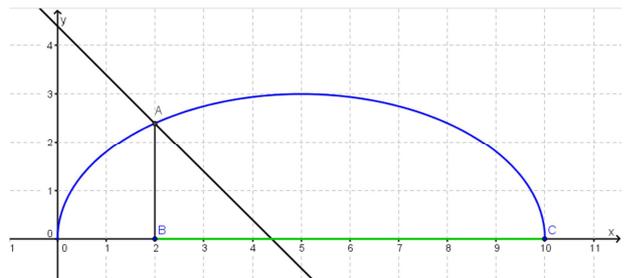
6. Risolvi graficamente la seguente disequazione irrazionale: $3\sqrt{1 - \frac{(x-5)^2}{25}} > \frac{22}{5} - x$.

Considero l'arco di ellisse traslata e la retta di equazione, rispettivamente:

$$y = 3\sqrt{1 - \frac{(x-5)^2}{25}} \quad y = \frac{22}{5} - x$$

L'arco di ellisse è dato dalla ellisse di centro (5, 0) e assi di lunghezza 10 e 6, ma ne considero solo la parte superiore. Dopo aver rappresentato anche la retta, determino il punto di intersezione A di ascissa 2. La soluzione è indicata in verde nel disegno:

$$2 < x \leq 10$$



7. Trova l'equazione del grafico seguente, utilizzando i dati della figura:

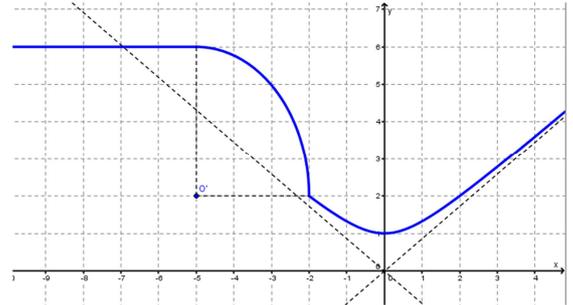
La prima è una retta parallela all'asse x di equazione: $y = 6$.

La seconda è un arco di ellisse di centro $O'(-5; 2)$, semiasse maggiore 4 e semiasse minore 3:

$$\frac{(x+5)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

$$(y-2)^2 = 16 \left(1 - \frac{(x+5)^2}{9} \right)$$

$$y = 2 + \frac{4}{3} \sqrt{-16 - x^2 - 10x}$$



La terza è un arco di iperbole di vertice reale $(0; 1)$ e passante per il punto $(-2; 2)$, perciò dall'equazione generica:

$$\frac{x^2}{a^2} - y^2 = -1$$

sostituisco le coordinate del punto per determinare l'equazione:

$$\frac{4}{a^2} - 4 = -1 \quad \frac{4}{a^2} = 3 \quad a^2 = \frac{4}{3}$$

$$\frac{3x^2}{4} - y^2 = -1 \quad y^2 = \frac{3}{4}x^2 + 1 \quad y = \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 1}$$

Riassumendo:

$$y = \begin{cases} 6 & x \leq -5 \\ 2 + \frac{4}{3} \sqrt{-16 - x^2 - 10x} & -5 < x \leq -2 \\ \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + 1} & x > -2 \end{cases}$$