1. Scrivi l'equazione della circonferenza passante per i punti $A\ (-1;2)$ e $B\ (2;5)$ e avente il centro sulla retta di equazione $y=2x-2$.

L'asse del segmento AB passa per il centro della circonferenza, perciò determino l'equazione dell'asse, metto a sistema con la retta e trovo le coordinate del centro:

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-2)^2=(x-2)^2+(y-5)^2\\ y=2x-2\end{cases} \qquad \begin{cases}2x+1-16x+16=-4x+4-28x+49\\ y=2x-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}18\,x=36\\ y=2x-2\end{cases} \qquad \begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$$

Avendo il centro, posso applicare la definizione di circonferenza come luogo geometrico, con raggio AC:

$$(x-2)^2+(y-2)^2=3^2 \qquad \boldsymbol{x^2+y^2-4x-4y-1=0}$$

2. Determina l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y di vertice $V\left(1;\ -\frac{3}{4}\right)$ e fuoco $F\ (1;\ -1)$.

Le generiche coordinate del vertice sono $V\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$ e quelle del fuoco $F\left(-\frac{b}{2a};\frac{1-\Delta}{4a}\right)$. Poniamo le generiche coordinate uguali ai dati e risolviamo il sistema:

$$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=1\\ -\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{3}{4}\\ \dfrac{1-\Delta}{4a}=-1\end{cases} \qquad \begin{cases}b=-2a\\ \Delta=3a\\ \dfrac{1-3a}{4a}=-1\end{cases} \qquad \begin{cases}b=-2a\\ \Delta=3a\\ \dfrac{1}{4a}=-\dfrac{1}{4}\end{cases} \qquad \begin{cases}a=-1\\ b=2\\ 4+4c=-3\end{cases} \qquad \begin{cases}a=-1\\ b=2\\ c=-\dfrac{7}{4}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{y=-x^2+2x-\frac{7}{4}}$$

3. Qual è l'equazione dell'ellisse passante per i punti $\left(\sqrt{3};\frac{1}{2}\right)$ e $\left(-1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$?

La generica equazione dell'ellisse ha equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Più comodamente, per i calcoli, la posso scrivere: $Ax^2+By^2=1$. Sostituisco in quest'ultima equazione le coordinate dei punti, che appartenendo all'ellisse rendono la sua equazione un'identità, e risolvo il sistema:

$$\begin{cases}3\,A+\dfrac{1}{4}\,B=1\\ A+\dfrac{3}{4}\,B=1\end{cases} \qquad \begin{cases}12\,A+B=4\\ 4\,A+3\,B=4\end{cases} \qquad \begin{cases}8A-2B=0\\ 12\,A+B=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}B=4A\\ 12\,A+4A=4\end{cases} \qquad \begin{cases}A=\dfrac{1}{4}\\ B=1\end{cases} \qquad \boldsymbol{\frac{x^2}{4}+y^2=1}$$

4. Scrivi l'equazione della funzione omografica di centro $O'(-3;\ -4)$ e passante per il punto dell'asse y di ordinata 1.

Cominciamo dalla funzione omografica di centro $O'(-3;\ -4)$, passante per il punto $(0;\ 1)$, perciò:

$$y=\frac{\frac{a}{c}x+\frac{b}{c}}{x+\frac{d}{c}}=\frac{-4x+\frac{b}{c}}{x+3}$$

Sostituendo le coordinate del punto:

$$1=\frac{0+\frac{b}{c}}{0+3}\qquad \frac{b}{c}=3$$

$$\boldsymbol{y=\frac{-4x+3}{x+3}}$$

5. Scrivi le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-2x-3=0$ condotte dal punto $P\ (-1;\ 3)$.

Sostituendo le coordinate del punto nell'equazione della circonferenza, si verifica che il punto non appartiene alla circonferenza. Perciò posso determinare l'equazione del fascio di rette con centro in P e, dopo aver determinato centro e raggio della circonferenza, imporre la distanza del centro dalla retta uguale al raggio:

$$t:\ y-3=m\,(x+1)\qquad C\ (1;0)\qquad r=2$$

$$d\ (C;t)=r\qquad \frac{|-3-m-m|}{\sqrt{1+m^2}}=2\qquad 3+2m=\pm 2\sqrt{1+m^2}$$

$$9+4m^2+12\,m=4+4m^2\qquad 12\,m=-5\qquad m=-\frac{5}{12}\qquad \boldsymbol{t_1:\ y=-\frac{5}{12}x+\frac{31}{12}}$$

Il punto è esterno alla circonferenza, perciò ci devono essere due rette tangenti. La seconda è una retta parallela all'asse y:

$$\boldsymbol{t_2: x=-1}$$

6. Data la parabola di equazione $y=x^2-3x+2$, determina l'equazione della retta tangente nel suo punto di ascissa – 1.

Determino innanzi tutto l'ordinata del punto, sostituendo l'ascissa nell'equazione della parabola:

$$y=1+3+2=6\qquad P\ (-1;6)$$

Applico la formula di sdoppiamento:

$$\frac{y+6}{2}=-x-3\frac{x-1}{2}+2\qquad \boldsymbol{y=-5x+1}$$

7. Scrivi le equazioni delle tangenti all'ellisse di equazione $x^2 + 9y^2 = 25$, parallele alla retta $\frac{4}{3}x + 3y - 1 = 0$.

Determino innanzi tutto il coefficiente angolare della retta, scrivendola in forma esplicita:

$$4x + 9y - 3 = 0 \qquad y = -\frac{4}{9}x + \frac{1}{3}$$

Metto a sistema l'equazione dell'ellisse con il fascio improprio di rette parallele alla retta data e pongo Δ = 0 nell'equazione risolvente:

$$\begin{cases} x^2 + 9y^2 = 25 \\ y = -\frac{4}{9}x + q \end{cases} \qquad x^2 + 9\left(\frac{16}{81}x^2 + q^2 - \frac{8}{9}qx\right) = 25 \qquad 25\,x^2 - 72\,qx + 81\,q^2 - 225 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 36^2 q^2 - 25\,(81\,q^2 - 225) = 0 \qquad 9^2\,4^2\,q^2 - 25 \cdot 9\,(9\,q^2 - 25\,) = 0$$

$$144\,q^2 - 225\,q^2 + 625 = 0 \qquad 81\,q^2 = 625 \qquad q = \pm\frac{25}{9}$$

Le due rette hanno equazione:

$$\boldsymbol{y = -\frac{4}{9}x \pm \frac{25}{9}}$$

8. Scrivi l'equazione della tangente all'iperbole di equazione $xy = -3$ nel suo punto di ascissa $\frac{1}{3}$.

Dopo aver determinato l'ordinata del punto, sostituendo l'ascissa nell'equazione dell'iperbole, posso applicare la formula di sdoppiamento:

$$\frac{1}{3}y = -3 \qquad y = -9 \qquad P\left(\frac{1}{3}; -9\right)$$

$$\frac{x_P y + x y_P}{2} = -3 \qquad \frac{1}{3}y - 9x = -6 \qquad \boldsymbol{y = 27x - 18}$$

In alternativa, posso determinare l'equazione del fascio di rette centrato in P, metterla a sistema con l'equazione dell'iperbole e porre $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente del sistema:

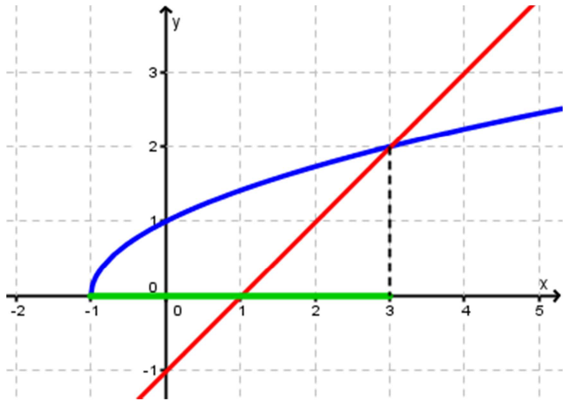
$$\begin{cases} xy = -3 \\ y + 9 = m\left(x - \frac{1}{3}\right) \end{cases} \qquad x\left(mx - \frac{1}{3}m - 9\right) = -3 \qquad mx^2 - x\left(\frac{1}{3}m + 9\right) + 3 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{1}{3}m + 9\right)^2 - 12m = 0$$

$$\frac{1}{9}m^2 + 81 + 6m - 12m = 0$$

$$\frac{1}{9}m^2 - 6m + 81 = 0 \qquad \left(\frac{1}{3}m - 9\right)^2 = 0 \qquad m = 27 \qquad \boldsymbol{y = 27x - 18}$$

9. Risolvi graficamente la disequazione: $\sqrt{x+1}-1 \geq x-2$.



Considero l'equazione corrispondente: $\sqrt{x+1}=x-1$, che corrisponde al sistema:

$$\begin{cases} y=\sqrt{x+1} \\ y=x-1 \end{cases}$$

La prima equazione rappresenta un arco di parabola, mentre la seconda è una retta parallela alla bisettrice di primo e terzo quadrante:

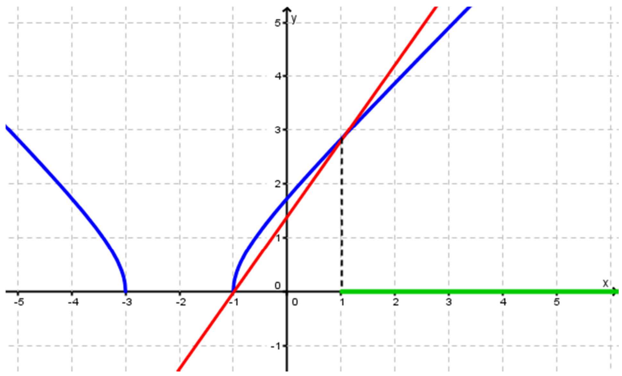
$$y=\sqrt{x+1} \qquad \begin{cases} y \geq 0 \\ x=y^2-1 \end{cases}$$

La parabola ha asse di simmetria coincidente con l'asse x e vertice nel punto $V\,(-1;0)$.

Dal grafico si evince che la soluzione è:

$$\boldsymbol{-1 \leq x \leq 3}$$

10. Risolvi graficamente la disequazione: $\sqrt{4x+x^2+3}<\sqrt{2}\,(x+1)$.



Considero l'equazione corrispondente: $\sqrt{4x+x^2+3}=\sqrt{2}\,(x+1)$, che corrisponde al sistema:

$$\begin{cases} y=\sqrt{4x+x^2+3} \\ y=\sqrt{2}\,(x+1) \end{cases}$$

La prima equazione rappresenta un'iperbole, mentre la seconda è una retta:

$$y=\sqrt{4x+x^2+3} \qquad \begin{cases} y \geq 0 \\ y=x^2+4x+4-1 \end{cases}$$

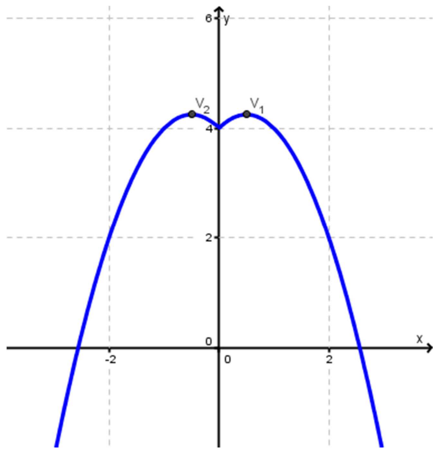
$$\begin{cases} y \geq 0 \\ (x+2)^2-y^2=1 \end{cases}$$

L'iperbole è traslata, di centro $(-2;0)$ e con i fuochi sull'asse x

Dal grafico si evince che la soluzione è:

$$\boldsymbol{x>1}$$

11. Rappresenta graficamente la funzione $y=-x^2+|x|+4$.



La funzione può essere così rappresentata:

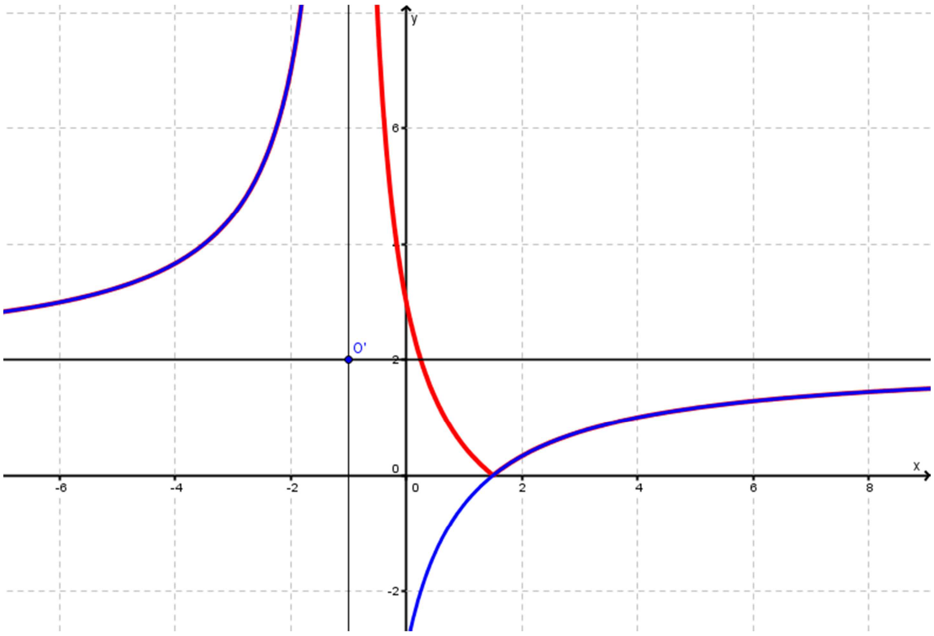
$$y=\begin{cases} -x^2+x+4 & se\ x \geq 0 \\ -x^2-x+4 & se\ x<0 \end{cases}$$

La prima ha vertice: $V_1\left(\frac{1}{2};\frac{17}{4}\right)$

La prima ha vertice: $V_2\left(-\frac{1}{2};\frac{17}{4}\right)$

12. Rappresenta graficamente la funzione $y = \left|\frac{2x-3}{x+1}\right|$.

Rappresento la funzione $y = \frac{2x-3}{x+1}$ con centro di simmetria $O'(-1; 2)$, dopodiché ciò che è già positivo – al di sopra dell'asse x – resta positivo e ciò che è negativo – al di sotto dell'asse x – diventa positivo.



13. Risolvi graficamente la disequazione: $\ln(x-1) < \frac{1}{x-1}$.

Considero l'equazione corrispondente: $\ln(x-1) = \frac{1}{x-1}$, che corrisponde al sistema:

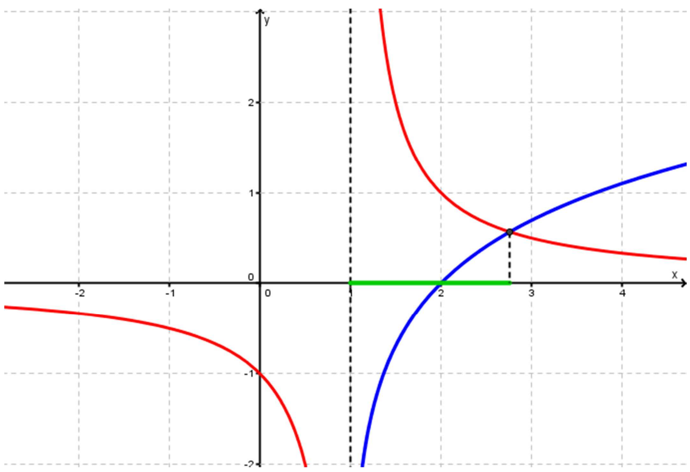
$$\begin{cases} y = \ln(x-1) \\ y = \dfrac{1}{x-1} \end{cases}$$

La prima equazione rappresenta una logaritmica traslata verso destra di 1, mentre la seconda è una funzione omografica di centro $O'(1; 0)$.

Come si evince dal grafico la soluzione è:

$$\boldsymbol{1 < x < \alpha}$$

Dove α è un valore tale che: $2{,}5 < \alpha < 3$.



14. Risolvi la disequazione: $\log\,(x+5)-\log\,(4-x)+\log\,(3x-1)>\log\,(3x-1)-\log\,(x+4)$.

$$C.A.:\begin{cases} x+5>0 \\ 4-x>0 \\ 3x-1>0 \\ x+4>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>-5 \\ x<4 \\ x>\dfrac{1}{3} \\ x>-4 \end{cases} \qquad \frac{1}{3}<x<4$$

$$\log\,(x+5)+\log\,(x+4)>\log\,(4-x)$$

$$\log\,(x+5)(x+4)>\log\,(4-x)$$

Mettendo a sistema la disequazione con le condizioni di accettabilità otteniamo:

$$\begin{cases} (x+5)(x+4)>4-x \\ \dfrac{1}{3}<x<4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+9x+20-4+x>0 \\ \dfrac{1}{3}<x<4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+10x+16>0 \\ \dfrac{1}{3}<x<4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+8)(x+2)>0 \\ \dfrac{1}{3}<x<4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x<-8 \quad \vee \quad x>-2 \\ \dfrac{1}{3}<x<4 \end{cases} \qquad \boldsymbol{\frac{1}{3}<x<4}$$

15. Risolvi la disequazione: $5\cdot 3^{1-x}-2^{1+x}\geq 4\cdot 3^{1-x}+3\cdot 2^{1+x}$.

$$5\cdot 3^{1-x}-4\cdot 3^{1-x}\geq 2^{1+x}+3\cdot 2^{1+x}$$

$$3^{1-x}\,(5-4)\geq 2^{1+x}\,(1+3) \qquad 3^{1-x}\geq 2^{1+x}\cdot 2^2 \qquad \frac{3}{3^x}\geq 8\cdot 2^x$$

$$6^x\leq\frac{3}{8} \qquad \boldsymbol{x\leq\log_6\frac{3}{8}}$$

16. Determina il dominio della seguente funzione: $y=\sqrt{\log_2 x-1}+\sqrt{-\log_2 x+4}$.

$$\begin{cases} \log_2 x-1\geq 0 \\ -\log_2 x+4\geq 0 \\ x>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \log_2 x\geq 1 \\ \log_2 x\leq 4 \\ x>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\geq 2 \\ x\leq 16 \\ x>0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{2\leq x\leq 16}$$