1. $\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}\right)\left[\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}\right)\right]=\left(x-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}x\right)+7$

$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}\right)\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{4}{9}+\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{4}{9}\right]=\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x^2-\frac{4}{9}-\frac{1}{3}x+7$

$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{8}{9}+\frac{2}{3}x\right)=\frac{1}{4}x^2-\frac{4}{9}+7$

$\frac{3}{4}\left(\frac{4}{9}x+\frac{1}{3}x^2-\frac{16}{27}-\frac{4}{9}x\right)-\frac{1}{4}x^2+\frac{4}{9}-7=0$

$\frac{1}{4}x^2-\frac{4}{9}-\frac{1}{4}x^2+\frac{4}{9}-7=0$ $\qquad 0x=7$ $\qquad \boldsymbol{\nexists x\in\mathbb{R}}$

2. $\frac{3+2x}{4x}=\frac{6-x}{1-2x}$

$\frac{(3+2x)(1-2x)-4x\,(6-x)}{4x\,(1-2x)}=0$ $\qquad C.A.: x\neq 0 \ \wedge \ x\neq\frac{1}{2}$

$3-6x+2x-4x^2-24\,x+4x^2=0$ $\qquad 28x=3$ $\qquad \boldsymbol{x=\frac{3}{28}}$ $acc.$

3. $\frac{2}{x^2-2x-8}+\frac{3}{x^2-5x+4}=\frac{1}{x^2+x-2}$

$\frac{2}{(x-4)(x+2)}+\frac{3}{(x-4)(x-1)}=\frac{1}{(x-1)(x+2)}$ $\qquad C.A.: x\neq 4 \ \wedge \ x\neq -2 \ \wedge \ x\neq 1$

$\frac{2(x-1)+3\,(x+2)-(x-4)}{(x-4)(x+2)(x-1)}=0$ $\qquad 2x-2+3x+6-x+4=0$ $\qquad 4x=-8$

$x=-2$ $\quad$ *non accettabile per le C.A.* $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\nexists x\in\mathbb{R}}$

4. $3x^2-4x-4=0$

$3x^2-6x+2x-4=0$

$3x\,(x-2)+2\,(x-2)=0$

$(x-2)(3x+2)=0$ $\qquad x=\boldsymbol{2} \ \vee \ x=\boldsymbol{-\frac{2}{3}}$

5. $2a^2x - 2ax + 1 = a^2$

$2ax\,(a-1) = a^2 - 1$ $\qquad$ $2ax\,(a-1) = (a-1)(a+1)$

Se $\boldsymbol{a = 1}$ ***equazione indeterminata***

Se $\boldsymbol{a = 0}$ ***equazione impossibile***

Se $\boldsymbol{a \neq 1 \ \wedge \ a \neq 0 \qquad x = \frac{a+1}{2a}}$

6. $\dfrac{3x^2 - 4x - 4}{2x^2 - x - 1} \leq 0$

$\dfrac{3x^2 - 6x + 2x - 4}{2x^2 - 2x + x - 1} \leq 0$ $\qquad$ $\dfrac{3x\,(x-2) + 2\,(x-2)}{2x\,(x-1) + 1\,(x-1)} \leq 0$

$\dfrac{(x-2)(3x+2)}{(x-1)(2x+1)} \leq 0$

$N_1 \geq 0: \quad x \geq 2$

$N_2 \geq 0: \quad x \geq -\frac{2}{3}$

$D_1 > 0: \quad x > 1$

$D_2 > 0: \quad x > -\frac{1}{2}$

$\boldsymbol{-\frac{2}{3}} \qquad -\frac{1}{2} \qquad 1 \qquad \boldsymbol{2}$

N_1	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
N_2	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
D_1	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
D_2	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

$\boldsymbol{-\frac{2}{3} \leq x < -\frac{1}{2} \quad \vee \quad 1 < x \leq 2}$

7. $\begin{cases} \dfrac{(3x-1)^2}{3} + \dfrac{x+3}{6} < 3x\,(x-1) \\ \dfrac{1-2x}{3} + \dfrac{1}{2} < 2x + \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) \end{cases}$

$\begin{cases} 2\,(9x^2 - 6x + 1) + x + 3 < 18x\,(x-1) \\ 2\,(1-2x) + 3 < 12x + 2\left(1 - \dfrac{x}{2}\right) \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} 18x^2 - 12x + 2 + x + 3 < 18x^2 - 18x \\ 2 - 4x + 3 < 12x + 2 - x \end{cases}$

$\begin{cases} 7x < -5 \\ 15x > 3 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x < -\dfrac{5}{7} \\ x > \dfrac{1}{5} \end{cases}$

$-\frac{5}{7} \qquad \frac{1}{5}$

A			
B			

$\boldsymbol{\nexists\, x \in \mathbb{R}}$

8. $|\, x+1\,| + |\, x^2-3x-4\,| \leq 0$

$|x+1| + |x+1||x-4| \leq 0$ $\quad$ $|x+1|(1+|x-4|) \leq 0$ $\quad$ $\boldsymbol{x=-1}$

9. $\dfrac{|x|}{|x|+1} - 1 < 0$

$\dfrac{|x|-|x|-1}{|x|+1} < 0$ $\quad$ $-\dfrac{1}{|x|+1} < 0$ $\quad$ $|x|+1 > 0$ $\quad$ $\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}}$

10. $\left|\, 2\left(\dfrac{x}{3}-2\right) - \dfrac{x}{2} + 3 \right| \leq 1$

$\left|\dfrac{2}{3}x - 4 - \dfrac{1}{2}x + 3\right| \leq 1$ $\quad$ $\left|\dfrac{1}{6}x - 1\right| \leq 1$ $\quad$ $|x-6| \leq 6$

$-6 \leq x-6 \leq 6$ $\quad$ $\boldsymbol{0 \leq x \leq 12}$

11. Due angoli adiacenti sono uno i 2/7 dell'altro. Determina l'ampiezza dell'angolo formato dalle loro bisettrici. Il risultato ottenuto può essere generalizzato per qualsiasi coppia di angoli adiacenti?

Sia x il primo angolo e $\frac{2}{7}x$ il secondo angolo. La loro somma è pari a 180°, visto che sono adiacenti.

PRIMO METODO:
Determiniamo i due angoli:

$$x + \frac{2}{7}x = 180^\circ \qquad \frac{9}{7}x = 180^\circ \qquad x = 140^\circ$$

Se il primo angolo è di 140° il secondo è di 40°. La metà del primo è 70°, la metà del secondo è 20° e la loro somma è di **90°**.

SECONDO METODO:
L'angolo formato dalle loro bisettrici sarà di 90°, perché se la loro somma è di 180°, la somma delle loro metà (ovvero degli angoli tagliati dalle bisettrici) è di **90°**, qualunque valore essi abbiano.

12. In un triangolo ABC, l'ampiezza dell'angolo $\hat{A}$ supera di 20° quella dell'angolo $\hat{C}$, e l'angolo esterno all'angolo $\hat{B}$ ha un'ampiezza uguale ai 5/3 di quella di $\hat{A}$. Calcola l'ampiezza dei tre angoli del triangolo.

$$\hat{C} = x \qquad \hat{A} = x + 20°$$

Per il secondo teorema dell'angolo esterno, in un triangolo ogni angolo esterno è congruente alla somma dei due angoli interni non adiacenti a esso, perciò: $\hat{A} + \hat{C} = \frac{5}{3}\hat{A} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{C} = \frac{2}{3}\hat{A}$

Tradotto in termini di equazione:

$$x = \frac{2}{3}(x + 20°) \qquad \frac{1}{3}x = \frac{2}{3} \cdot 20° \qquad x = 40°$$

Concludendo:

$$\hat{C} = \mathbf{40°} \qquad \hat{A} = \mathbf{60°}$$

Siccome la somma degli angoli interni di un triangolo è congruente a un angolo piatto:

$$\hat{B} = 180° - \hat{C} - \hat{A} = \mathbf{80°}$$