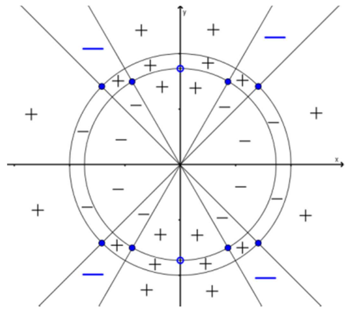
1. $(tg^2x-3)(2\,sen^2x-1)\le 0$

$$IF\ge 0:\quad tg\,x\le-\sqrt{3}\quad\vee\quad tg\,x\ge\sqrt{3}$$
$$IIF\ge 0:\quad sen\,x\le-\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\vee\quad sen\,x\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$$



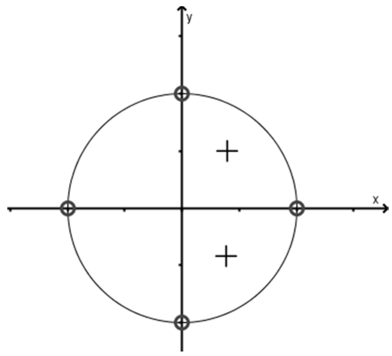
$$\frac{\pi}{4}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{3}+k\pi\qquad\vee\qquad\frac{2}{3}\pi+k\pi\le x\le\frac{3}{4}\pi+k\pi$$

2. $\frac{\sqrt{2}}{\cos x}+\frac{4\cos x}{sen^2\,2x}+\frac{sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{sen^2x}<0$

$$\frac{\sqrt{2}}{\cos x}+\frac{4\cos x}{4\,sen^2x\cos^2x}+\frac{\cos x}{sen^2x}<0$$
$$\frac{\sqrt{2}}{\cos x}+\frac{1}{sen^2x\cos x}+\frac{\cos x}{sen^2x}<0$$
$$\frac{\sqrt{2}\,sen^2x+1+\cos x}{sen^2x\cos x}<0$$

$1+\cos x$, considerato il campo di variazione del coseno, è positivo e, sommato a un addendo sempre positivo perché quadrato, dà un numeratore sempre positivo.
Perciò:

$$N>0:\quad\forall x\in\mathbb{R}$$
$$D_1>0:\quad sen^2x>0\qquad sen\,x\ne 0\qquad\forall x\ne k\pi$$
$$D_2>0:\ \cos x>0$$



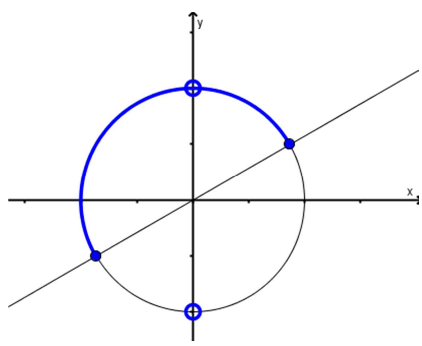
$$\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{3}{2}\pi+2k\pi\quad\wedge\quad x\ne\pi+2k\pi$$

3. $\frac{\sqrt{3}\,sen\,x-\cos x}{1-sen^2x}\ge 0$

$$D>0:\ \ 1-sen^2x>0\quad sen^2\,x<1\quad sen\,x\ne\pm1\qquad\forall x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$N\ge 0:\ \sqrt{3}\,sen\,x-\cos x\ge 0$$

$$\begin{cases}\sqrt{3}\,Y-X=0\\ X^2+Y^2=1\end{cases}\qquad\begin{cases}X=\sqrt{3}\,Y\\ 3\,Y^2+Y^2=1\end{cases}\qquad\begin{cases}X=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ Y=\pm\dfrac{1}{2}\end{cases}$$



$$\frac{\pi}{6}+2k\pi\le x<\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad\vee\quad\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{7}{6}\pi+2k\pi$$

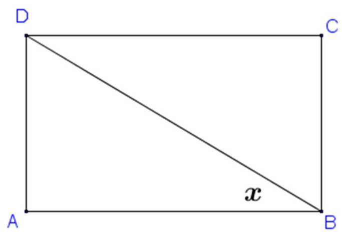
4. In un rettangolo ABCD, di area $8a^2$, la diagonale DB misura $4a$. Trova l'angolo $D\hat{B}A$.

$$\overline{AB} = 4a \cos x \qquad \overline{AD} = 4a \;\; sen\, x$$

$$4a \cos x \; \cdot 4a \; sen\, x = 8a^2$$

$$2 \cos x \;\; sen\, x = 1 \qquad sen\; 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{2} \qquad x = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$$



5. Una semicirconferenza ha diametro $\overline{AB} = 10\; cm$ e t è la sua tangente in A. Considera un punto P sulla semicirconferenza e indica con C il punto proiezione di P su t. Posto $P\hat{B}A = x$, trova per quale posizione di P si ha:

$$\overline{PC} + \overline{PB} = \frac{25}{2}$$

Gli angoli $P\hat{A}C \cong P\hat{B}A$ perché entrambi complementari dell'angolo $P\hat{A}B$, visto che i triangoli APC e ABP sono entrambi triangoli rettangoli:

$$\overline{PC} = \; \overline{AP} sen\; x = \overline{AB}\; sen^2 x \qquad \overline{AP} = \overline{AB} \;\; sen\; x$$

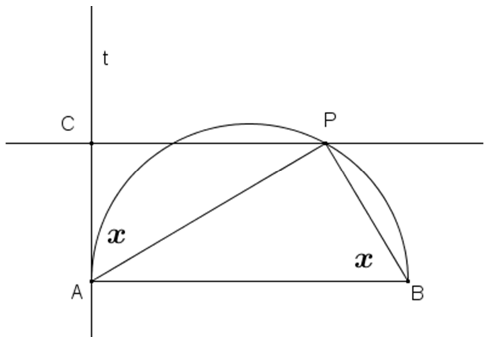
$$\overline{PB} = \overline{AB} \cos x$$

$$10\; sen^2 x + 10 \cos x = \frac{25}{2}$$

$$4\,(1 - \cos^2 x) + 4 \cos x = 5 \qquad 4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1 = 0$$

$$(2 \cos x - 1)^2 = 0 \qquad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$



6. $3 \binom{x}{3} = x \binom{x-1}{4}$

$$3 \cdot \frac{x!}{3!\,(x-3)!} = x \cdot \frac{(x-1)!}{4!\,(x-5)!} \qquad C.A.: x \geq 5$$

$$3 \cdot \frac{x\,(x-1)(x-2)(x-3)!}{6\,(x-3)!} = x \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)!}{24\,(x-5)!}$$

$$12 = (x-3)(x-4) \qquad x^2 - 7x = 0 \qquad \begin{matrix} x_1 = 0 & non\; acc. per\; C.A. \\ x_2 = \boldsymbol{7} & acc. \end{matrix}$$

7. In una banca ci sono sei sportelli. In quanti modi diversi si possono disporre le prime sei persone che entrano nella banca?

La prima persona può scegliere tra 6 sportelli, la seconda tra 5, la terza tra 4… perciò:

$$6! = \mathbf{720}$$

8. Si lancia per cinque volte un dado. Calcola la probabilità che:
   A. per due volte esca un numero maggiore di 4;
   B. per quattro volte esca un numero pari.

A. Per il teorema delle prove ripetute:

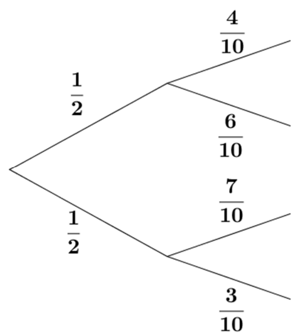
$$\binom{5}{2}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{5!}{2!\,3!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = 10\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\frac{8}{3^3} = \mathbf{\frac{80}{243}}$$

B. Per il teorema delle prove ripetute:

$$\binom{5}{4}\left(\frac{3}{6}\right)^4\left(\frac{3}{6}\right)^1 = \frac{5!}{4!\,1!}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 5\cdot\frac{1}{2^5} = \mathbf{\frac{5}{32}}$$

9. Un automobilista arriva a un bivio. sa che una strada è esatta e l’altra sbagliata. Vi sono due persone A e B al bivio. A dice la verità 4 volte su 10. B invece 7 volte su 10. L’automobilista chiede informazioni a caso a una di esse e ne segue l’indicazione. Calcola la probabilità che ha quella persona di percorre la strada esatta.

Schematicamente:



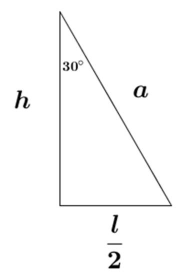
$$p = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10} = \mathbf{\frac{11}{20}}$$

10. Una piramide a base quadrata ha l’altezza lunga $15\sqrt{3}\ \mathrm{cm}$, che forma un angolo di 30° con l’apotema di ogni singola faccia. Determina la superficie totale del solido.

$$h = 15\sqrt{3}\ cm \qquad h = a\cos 30° \qquad a = \frac{h}{\cos 30°} = 30\ cm$$

$$\frac{l}{2} = a\ sen\ 30° \qquad l = 30\ cm = a$$

$$S = l^2 + \frac{4l}{2}\cdot a = l^2 + 2l^2 = 3l^2 = \mathbf{2700\ cm^2}$$



11. L'altezza di un cilindro è 23/8 del diametro di base e la superficie totale è equivalente alla superficie di una sfera di raggio 6 cm. Determina il raggio e l'altezza del cilindro.

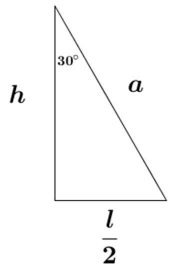
$$h = \frac{23}{8} 2r = \frac{23}{4} r \qquad S = 4\pi\,(6\ cm)^2 = 144\,\pi\ cm^2$$

$$r = x \qquad h = \frac{23}{4} x$$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi x^2 + 2\pi x^2 \frac{23}{4} = \frac{27}{2}\pi x^2$$

$$\frac{27}{2}\pi x^2 = 144\pi \qquad x = \frac{4}{3}\sqrt{6}\ cm$$

$$r = \boldsymbol{\frac{4}{3}\sqrt{6}\ cm} \qquad h = \boldsymbol{\frac{23}{3}\sqrt{6}\ cm}$$



12. Un parallelepipedo rettangolo ha volume uguale al volume di un cubo la cui diagonale è $6\sqrt{3}\ cm$ e la sua altezza è $8\ cm$. Sapendo che uno spigolo di base è 1/3 dell'altro, determina l'area della superficie totale del parallelepipedo.

$$V = V_c \qquad d = 6\sqrt{3}\ cm = \sqrt{l^2 + l^2 + l^2} = l\sqrt{3}$$

$$l\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\ cm \qquad l = 6\ cm$$

Determinata la misura del lato del cubo, 6 cm, possiamo determinare il volume del parallelepipedo:

$$V = V_c = l^3 = 216\ cm^3 \qquad c = 8\ cm \qquad a = \frac{1}{3} b$$

$$abc = V \qquad \frac{1}{3} b^2 \cdot 8\ cm = 216\ cm^3$$

$$b^2 = 81\ cm^2 \qquad b = 9\ cm \qquad a = 3\ cm$$

$$S = 2ab + 2\,(a+b)c = \boldsymbol{246\ cm^2}$$

13. Un parallelepipedo rettangolo ha le dimensioni di 3 cm, 4 cm e 12 cm. Determina il volume del cubo che ha superficie totale equivalente alla superficie totale del parallelepipedo. Di quanto deve aumentare la misura dello spigolo minore del parallelepipedo affinché l'area della sua superficie totale raddoppi?

Determino innanzi tutto la superficie totale del parallelepipedo e quindi il lato del cubo:

$$a = 3\ cm \qquad b = 4\ cm \qquad c = 12\ cm \qquad S = 2ab + 2\,(a+b)c = 192\ cm^2$$

$$S_c = 6l^2 \qquad 6\,l^2 = 192\ cm^2 \qquad l = 4\sqrt{2}\ cm \qquad V_c = l^3 = \boldsymbol{128\sqrt{2}\ cm^3}$$

Pongo la superficie del parallelepipedo con la dimensione di 3 cm aumentata di x uguale al doppio della superficie totale del parallelepipedo:

$$2\,(a+x)\,b + 2\,(a+x+b)\,c = 2\,(2ab + 2\,(a+b)c) \qquad (a+x)\,b + (a+x+b)\,c = 2ab + 2\,(a+b)c$$

$$ab + bx + ac + cx + bc = 2ab + 2ac + 2bc \qquad x = \frac{ab + ac + bc}{b + c} = \boldsymbol{6\ cm}$$