1. Dall'esame del grafico della funzione rappresentato in figura, deduci:

$\lim_{x \to -1} f(x) = \boldsymbol{non\ esiste}$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

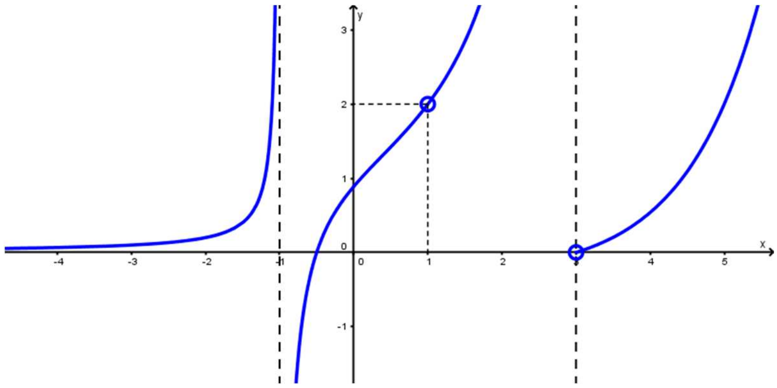
$\lim_{x \to 1} f(x) = \mathbf{2}$

$\lim_{x \to 2} f(x) = \boldsymbol{f(2)}$

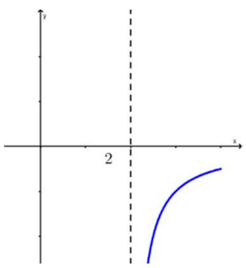
$\lim_{x \to 3} f(x) = \boldsymbol{non\ esiste}$

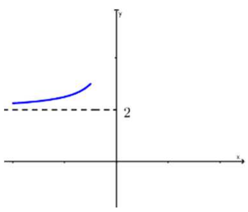
$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \mathbf{0}$

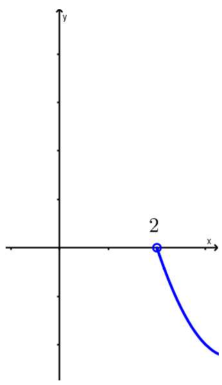
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

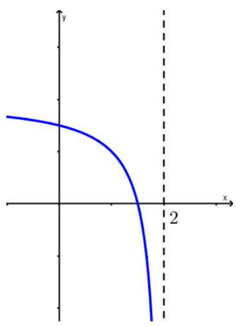


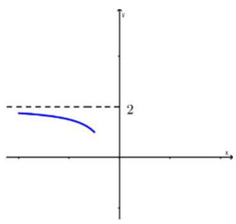
2. Per quale delle funzioni i cui grafici sono qui di seguito indicati si verifica che $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$?











a. ☑ b. ☐ c. ☐ d. ☐ e. ☐

Nei restanti quattro casi, scrivi i limiti che si possono dedurre dai rispettivi grafici:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \mathbf{2^+}$ $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \mathbf{0^-}$ $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \mathbf{2^-}$

3. Utilizzando la definizione, verifica i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-6}{3}=1 \qquad \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{5x-10}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-6}{3}=1$$

Ovvero: $\forall\varepsilon>0\ \exists\, I(9)\ |\ \left|\frac{x-6}{3}-1\right|<\varepsilon \quad \forall x\in I(9), x\neq 9$

$$\left|\frac{x-6-3}{3}\right|<\varepsilon \qquad |x-9|<3\varepsilon \qquad -3\varepsilon<x-9<3\varepsilon \qquad \boldsymbol{9-3\varepsilon<x<9+3\varepsilon}$$

Quello appena determinato è un intorno di 9, perciò il limite è verificato.

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{5x-10}=+\infty$$

Ovvero: $\forall M>0\ \exists\delta>0\ |\ \frac{1}{5x-10}>M \quad \forall x\in\,]2,2+\delta[$

$$\frac{1-5Mx+10M}{5x-10}>0 \qquad \begin{matrix} N>0:\ x<\dfrac{10M+1}{5M} & x<2+\dfrac{1}{5M} \\ D>0:\quad 5x-10>0 & x>2 \end{matrix} \qquad \boldsymbol{2<x<2+\frac{1}{5M}}$$

Quello appena determinato è un intorno destro di 2, perciò il limite è verificato.

4. Verifica che il grafico della funzione

$$f(x)=\frac{2x^2+3}{x^2+1}$$

ammette asintoto orizzontale $y=2$.

Perché ammetta asintoto orizzontale, devo verificare che valga il limite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x^2+1}=2$$

Ovvero: $\forall\varepsilon>0\ \exists\, c>0\ |\ \left|\frac{2x^2+3}{x^2+1}-2\right|<\varepsilon \quad \forall x\ |x|>c$

$$\left|\frac{2x^2+3-2x^2-2}{x^2+1}\right|<\varepsilon \qquad \frac{1}{x^2+1}<\varepsilon \qquad x^2+1>\frac{1}{\varepsilon} \qquad \boldsymbol{x<-\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}\ \vee\ x>\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}}$$

Quello appena determinato è un intorno di ∞, perciò il limite è verificato.

5. Calcola i seguenti limiti:

a. $\lim_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}}(x^2\, arc\, sen x) = \frac{1}{2}\, arc\, sen\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$

b. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x}\ln x) = +\infty$

c. $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}e^x\right) = \mathbf{0}$

d. $\lim_{x\to2}\frac{x^4-8x^2+16}{x^3-8} = \lim_{x\to2}\frac{(x^2-4)^2}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2(x+2)^2}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)^2}{x^2+2x+4} = \mathbf{0}$

e. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+9}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x} = \mathbf{-1}$

f. $\lim_{x\to0}\frac{sen^2x+2x^2+x^3}{4x^2+5\,sen^2x} = \lim_{x\to0}\frac{x^2\left(\frac{sen^2x}{x^2}+2+x\right)}{x^2\left(4+5\frac{sen^2x}{x^2}\right)} = \lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{senx}{x}\right)^2+2+x}{4+5\left(\frac{senx}{x}\right)^2} = \frac{1+2}{4+5} = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$

g. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2} = \lim_{x\to0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$

h. $\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\sqrt{\frac{1-x^3}{4-x^3}}+\sqrt{-\frac{1}{x}}\right) = \ln\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{1-x^3}{4-x^3}}+\sqrt{-\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1-x^3}{4-x^3}}+\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-\frac{1}{x}}\right) =$

$= \ln\left(\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^3}{4-x^3}}+\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)}\right) = \ln\left(\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{-x^3}}+\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)}\right) = \mathbf{0}$

i. $\lim_{x\to+\infty} arc\, sen\frac{x^2}{1+x^2} = arc\, sen\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\right) = arc\, sen\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}\right) = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

l. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{2x}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{3}{2}y} = \lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^{-\frac{3}{2}} = \boldsymbol{e^{-\frac{3}{2}}}$

$\frac{1}{y} = -\frac{3}{2x} \quad x = -\frac{3}{2}y$

m. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\ senx}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\ senx}=$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\ senx}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{1+\cos x}\right)=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{sen^2x}{x\ senx}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

n. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln 2x}}=\lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln 2x}}}=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{\ln 2x}\cdot\ln\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln 2x}\cdot\ln\frac{1}{x}\right)}=$

$$=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln x}{\ln 2+\ln x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln x}{\ln x\left(\frac{\ln 2}{\ln x}+1\right)}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\frac{\ln 2}{\ln x}+1}}=e^{-1}=\boldsymbol{\frac{1}{e}}$$

o. $\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+x)}{3^x-1}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\log_2(1+x)}{x}\cdot\frac{x}{3^x-1}\right)=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{3^x-1}\right)=\boldsymbol{\log_2 e\cdot\log_3 e}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log_2(1+x)=\lim_{x\to 0}\log_2(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_2\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y=\log_2 e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{3^x-1}=\lim_{y\to 0}\frac{\log_3(1+y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\log_3(1+y)=\lim_{y\to 0}\log_3(1+y)^{\frac{1}{y}}=\log_3\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=\log_3 e$$

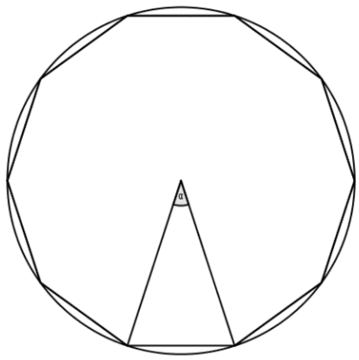
p. $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x\ln\,(sen\,x)-sen\,x\ln\,(sen\,x)-tg\,x\ln\,(sen\,2x)+sen\,x\ln\,(sen\,2x)}{x^3}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x\ln\,(sen\,x)\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)-sen\,x\ln\,(sen\,2x)\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{senx}{x}\cdot\frac{\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)(\ln\,(sen\,x)-\ln\,(sen\,2x))}{x^2}\right)=\left(\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1-\cos x)\left(\ln\frac{sen\,x}{sen\,2x}\right)}{x^2\cos x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen^2x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x\,(1+\cos x)}\cdot\ln\frac{sen\,x}{2\,sen\,x\cos x}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}=\mathbf{\ln\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

6. Detta A (n) l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio C di raggio 5, verificare che $A(n) = \frac{n}{2}\, r^2\, sen\frac{2\pi}{n}$ e calcolarne il limite per $n \to \infty$. (Esame di stato 2015 sessione ordinaria – Quesito 7)



Un poligono di n lati può essere diviso in n triangoli isosceli congruenti. I lati obliqui misurano tutti r e l'angolo al vertice, α, si può ottenere considerando il fatto che si ottiene dividendo l'angolo giro per il numero di lati del poligono, perciò: $\alpha = \frac{2\pi}{n}$.
Possiamo ottenere l'area del poligono moltiplicando per n l'area dei singoli triangoli:

$$A(n) = n \cdot \frac{1}{2} \cdot r \cdot r \cdot sen\,\frac{2\pi}{n} = \frac{n}{2} r^2 sen\,\frac{2\pi}{n}$$

come indicato nel testo.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2} r^2 sen\,\frac{2\pi}{n}\right) = r^2 \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2\pi}\pi \cdot sen\,\frac{2\pi}{n}\right) = \qquad pongo: x = \frac{2\pi}{n}$$

$$= \pi r^2 \lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} = \boldsymbol{\pi r^2}$$

Ovvero, l'area di una circonferenza.