$$y = \frac{x^2 - x - 6}{(x-1)^2}$$

Dominio: $x - 1 \neq 0$ $\boldsymbol{D =]-\infty; 1[\ \cup\ ]1; +\infty[}$

La funzione non è né pari né dispari, vista l'asimmetria del dominio.

Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases} y = \frac{x^2-x-6}{(x-1)^2} \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - x - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{2} \\ y = 0 \end{cases}$ $\boldsymbol{A\ (-2; 0)}$ $\boldsymbol{B\ (3; 0)}$

Intersezioni con l'asse y: $\begin{cases} y = \frac{x^2-x-6}{(x-1)^2} \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = -6 \end{cases}$ $\boldsymbol{C\ (0; -6)}$

Positività della funzione: $\frac{x^2-x-6}{(x-1)^2} > 0$ $x^2 - x - 6 > 0$ $\boldsymbol{x < -2 \quad \vee \quad x > 3}$

Ricerca di asintoti:

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{x^2 - x - 6}{(x-1)^2} = -\infty \qquad \boldsymbol{x = 1\ asintoto\ verticale}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x + 1} = 1 \qquad \boldsymbol{y = 1\ asintoto\ orizzontale}$$

Crescenza/decrescenza:

$$y' = \frac{(2x-1)(x-1)^2 - 2\,(x-1)(x^2-x-6)}{(x-1)^4} = \frac{2x^2 - 3x + 1 - 2x^2 + 2x + 12}{(x-1)^3} = \frac{-x+13}{(x-1)^3} = 0 \qquad \boldsymbol{x = 13}$$

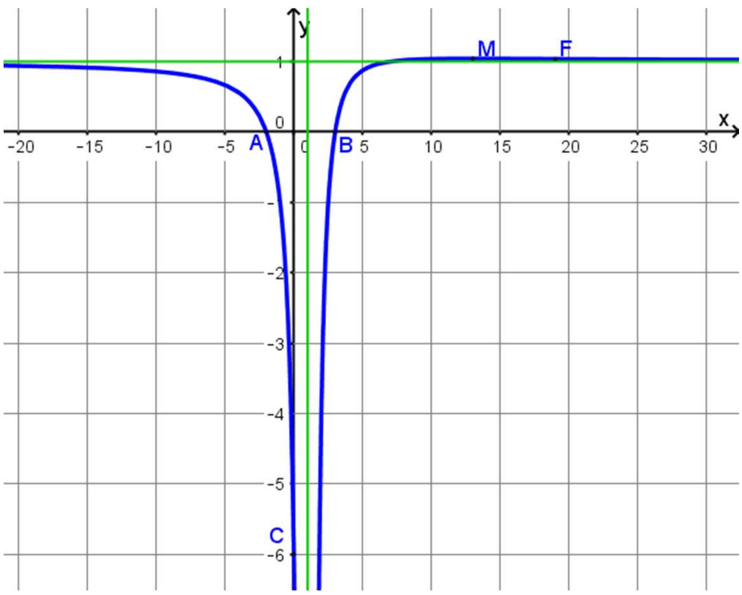
$$\boldsymbol{y' > 0 \qquad 1 < x < 13}$$

$\boldsymbol{M\ \left(13; \frac{25}{24}\right)}$ punto di massimo per la funzione.

Concavità:

$$y'' = \frac{-(x-1)^3 - (-x+13)3\,(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{-x + 1 + 3x - 39}{(x-1)^4} = \frac{2\,(x-19)}{(x-1)^4} > 0 \qquad \boldsymbol{x > 19}$$

$\boldsymbol{F\ \left(19; \frac{28}{27}\right)}$ punto di flesso per la funzione.



$$y = (x^2 - 3)\,e^x$$

Dominio: $\boldsymbol{D =]-\infty;\ +\infty[}$

La funzione non è né pari né dispari.

Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases} y = (x^2-3)\,e^x \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_{1,2} = \pm\sqrt{3} \\ y = 0 \end{cases}$ $\boldsymbol{A\left(-\sqrt{3};0\right)}$ $\boldsymbol{B\left(\sqrt{3};0\right)}$

Intersezioni con l'asse y: $\begin{cases} y = (x^2-3)\,e^x \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$ $\boldsymbol{C\,(0;-3)}$

Positività della funzione: $(x^2-3)\,e^x > 0$ $x^2-3>0$ $\boldsymbol{x < -\sqrt{3} \ \vee \ x > \sqrt{3}}$

Ricerca di asintoti:

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2-3)\,e^x = +\infty \qquad non\ esiste\ asintoto\ obliquo, infatti\ m = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2-3)\,e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} (x^2-3)\,e^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3}{e^{-x}} = 0 \qquad \boldsymbol{y = 0\ asintoto\ orizzontale}$$

Crescenza/decrescenza:

$$y' = 2x\,e^x + (x^2-3)\,e^x = (x^2+2x-3)\,e^x = 0 \qquad x_{1,2} = -1 \pm 2$$

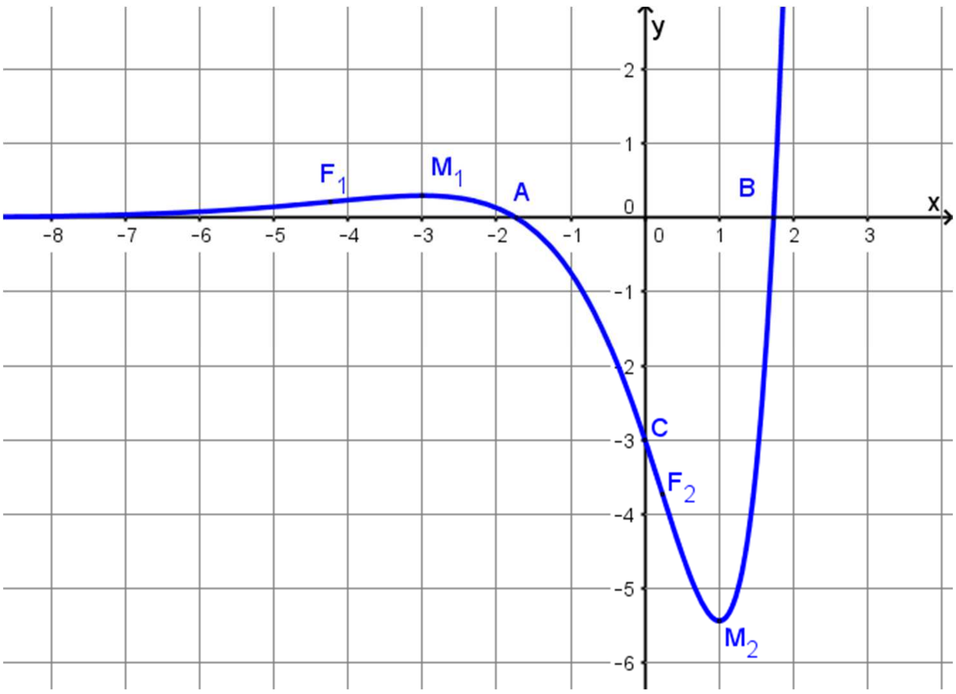
$$\boldsymbol{y' > 0 \qquad x < -3 \ \vee \ x > 1}$$

$\boldsymbol{M_1\left(-3;\frac{6}{e^3}\right)}$ punto di massimo per la funzione, $\boldsymbol{M_2\,(1;-2e\,)}$ punto di minimo per la funzione.

Concavità:

$$y'' = (2x+2)\,e^x + (x^2+2x-3)\,e^x = (x^2+4x-1)\,e^x > 0 \qquad x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{5} \qquad \boldsymbol{x < -2-\sqrt{5} \ \vee \ x > -2+\sqrt{5}}$$

$\boldsymbol{F_1\left(-2-\sqrt{5};\left(6+4\sqrt{5}\right)e^{-2-\sqrt{5}}\right)}$ e $\boldsymbol{F_2\left(-2+\sqrt{5};\left(6-4\sqrt{5}\right)e^{-2+\sqrt{5}}\right)}$ punti di flesso per la funzione.



$$y = x \ln x^2$$

Dominio: $x \neq 0$ $\boldsymbol{D =]-\infty; 0[\ \cup\ ]0;\ +\infty[}$

La funzione è dispari.

Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases} y = x \ln x^2 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \ln x^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ $\boldsymbol{A\ (-1; 0)}$ $\boldsymbol{B\ (1; 0)}$

Positività della funzione: $x \ln x^2 > 0$ $IF\colon\ x > 0$ $IIF\colon x^2 > 1$ $\boldsymbol{-1 < x < 0\ \vee\ x > 1}$

Ricerca di asintoti:

$$\lim_{x\to 0^\pm} x \ln x^2 = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\ln x^2}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\frac{1}{x^2}\cdot 2x}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x \ln x^2 = \pm\infty \qquad non\ esiste\ asintoto\ obliquo, infatti\ m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x \ln x^2}{x} = +\infty$$

Crescenza/decrescenza:

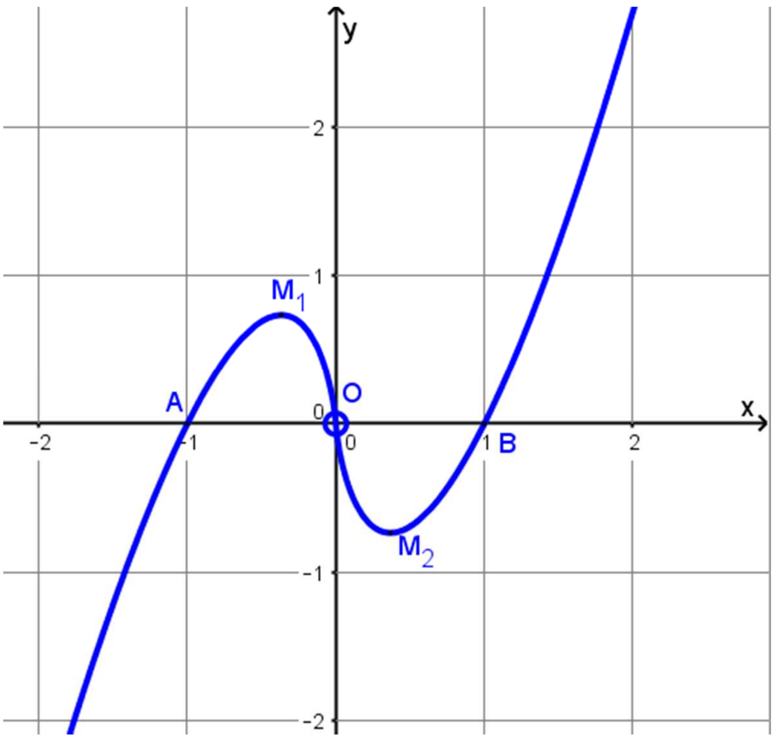
$$y' = \ln x^2 + x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \ln x^2 + 2 = 0 \qquad x^2 = e^{-2} \qquad \boldsymbol{x = \pm\frac{1}{e}}$$

$$\boldsymbol{y' > 0 \qquad x < -\frac{1}{e}\ \vee\ x > \frac{1}{e}}$$

$\boldsymbol{M_1}\left(-\frac{1}{e}; \frac{2}{e}\right)$ punto di massimo per la funzione, $\boldsymbol{M_2}\left(\frac{1}{e}; -\frac{2}{e}\right)$ punto di minimo per la funzione.

Concavità:

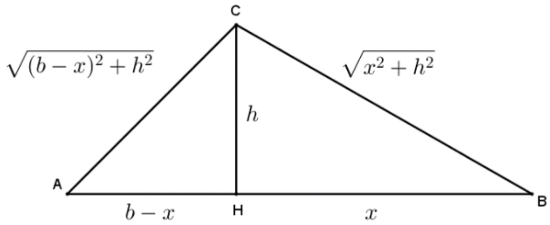
$$y'' = \frac{1}{x^2}\cdot 2x = \frac{2}{x} > 0 \qquad \boldsymbol{x > 0}$$



1. Tra i triangoli di base assegnata e di uguale area, dimostrare che quello isoscele ha perimetro minimo.

Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso PNI, Sessione ordinaria, 2004, Quesito 7

Considero un triangolo qualsiasi ABC e traccio l'altezza CH relativa alla base AB. La base AB è assegnata (le assegno valore b) e, siccome il triangolo ha anche area assegnata, significa che anche l'altezza CH si mantiene costante e la indico con h. Determino quindi gli altri lati, come indicato in figura, usando il teorema di Pitagora:



$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{BH}^2 + \overline{CH}^2} = \sqrt{x^2 + h^2}$$
$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{CH}^2} = \sqrt{(b-x)^2 + h^2}$$

Posso determinare la funzione:

$$f(x) = b + \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{(b-x)^2 + h^2}$$

Calcolo la derivata prima:

$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + h^2}} + \frac{-2b + 2x}{2\sqrt{(b-x)^2 + h^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} + \frac{x - b}{\sqrt{(b-x)^2 + h^2}} > 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} > \frac{b - x}{\sqrt{(b-x)^2 + h^2}}$$

Trattandosi di distanze, sono tutte quantità positive, perciò posso elevare al quadrato:

$$\frac{x^2}{x^2 + h^2} > \frac{b^2 - 2bx + x^2}{b^2 - 2bx + x^2 + h^2}$$

Visto che i denominatori sono positivi, posso fare il denominatore comune e semplificarli:

$$x^2b^2 - 2bx^3 + x^4 + x^2h^2 > x^2b^2 - 2bx^3 + x^4 + b^2h^2 - 2bh^2x + h^2x^2$$
$$-b^2h^2 + 2bh^2x > 0 \qquad x > \frac{b}{2}$$

La funzione ha un punto di minimo in $x = \frac{b}{2}$, perciò, visto che l'altezza relativa alla base coincide con la mediana, si tratta di un triangolo isoscele, come previsto.

2. Determinare un punto sull'asse delle ascisse per il quale è minima la somma del quadrato della sua distanza dalla retta $y = x + 1$ con il quadrato della sua distanza dalla retta $x = 4$.

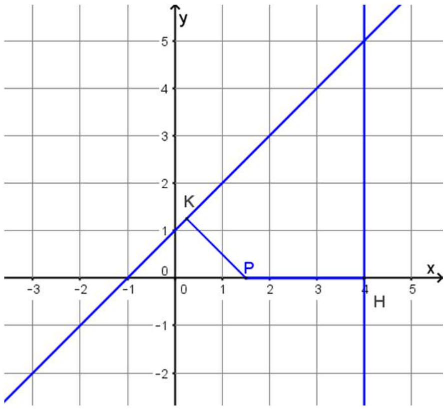
Considero un punto P di coordinate $P\ (0; x)$. Usando la formula della distanza punto / retta, posso determinare la funzione:

$$f(x) = \overline{PK}^2 + \overline{PH}^2 = \left(\frac{|x+1|}{\sqrt{2}}\right)^2 + |x-4|^2$$

Calcolo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\ (x+1) + 2\ (x-4) = x + 1 + 2x - 8 = 3x - 7$$

$$3x - 7 > 0 \qquad x > \frac{7}{3}$$



La funzione ha un punto di minimo in $x = \frac{7}{3}$, perciò il punto P ha coordinate: $\boldsymbol{P\ \left(\frac{7}{3}; 0\right)}$.

3. La funzione $f(x) = a\ sen\, x + b \cos x$ ha un estremo relativo per $x = \frac{4}{3}\pi$ ed è $f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 1$. Si trovino a e b e si dica quale è il periodo di $f(x)$.

Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di Ordinamento, Sessione ordinaria, 2006, Quesito 10

Dalle due condizioni date, il passaggio per un punto e l'estremo relativo, possiamo determinare i valori dei parametri richiesti, dopo aver calcolato la derivata della funzione: $f'(x) = a \cos x - b\ sen\, x$

$$\begin{cases} f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 1 \\ f'\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b = 1 \\ -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} \begin{cases} \sqrt{3}\,a - b = 2 \\ -\sqrt{3}\,a + 3b = 0 \end{cases} \\ \hline 2b = 2 \end{array} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a = \sqrt{3}} \\ \boldsymbol{b = 1} \end{cases}$$

La funzione determinata è:

$$f(x) = \sqrt{3}\ sen\, x + \cos x = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

e il suo periodo è $\boldsymbol{2\pi}$.

4. Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

determinare il parametro k in modo che nell'intervallo $[0; 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

Esame di Stato, Liceo Scientifico, Sessione ordinaria, 2015, Quesito 9

Perché la funzione soddisfi il teorema di Lagrange, deve essere continua in $[0, 2]$ e derivabile in $]0; 2[$. Considerato che i due tratti della funzione soddisfano le condizioni richieste, dobbiamo imporre la continuità anche per $x = 1$, perciò:

$$\lim_{x \to 1^-} x^3 = 1 \qquad \lim_{x \to 1^+} (x^2 - kx + k) = 1 - k + k = 1$$

I due limiti sono uguali, perciò la funzione è continua. Verifichiamo la derivabilità:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 < x < 1 \\ 2x - k & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Perché sia derivabile:

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} f'(x)$$

Perciò:

$$\lim_{x \to 1^-} 3x^2 = \lim_{x \to 1^+} (2x - k) \qquad 3 = 2 - k \qquad k = -1$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 + x - 1 & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Valendo le tesi, possiamo determinare il punto c della tesi tale per cui:

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

Consideriamo prima il primo tratto, per $0 \le x \le 1$:

$$3c^2 = \frac{5 - 0}{2} \qquad c^2 = \frac{5}{6} \qquad c = \pm\frac{\sqrt{30}}{6}$$

Il punto interno all'intervallo è $\boldsymbol{c = \frac{\sqrt{30}}{6}}$.

Consideriamo il secondo tratto, per $1 < x \le 2$:

$$2c + 1 = \frac{5 - 0}{2} \qquad c = \frac{3}{4}$$

Il punto non è interno all'intervallo dato.

5. Sia f la funzione, definita per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2$$

determinare il minimo di f.

Esame di Stato, Liceo Scientifico, Sessione ordinaria, 2015, Quesito 6

Calcolo la derivata prima e la pongo maggiore di zero:

$$f'(x) = 2\,(x-1) + 2\,(x-2) + 2\,(x-3) + 2\,(x-4) + 2\,(x-5) = 2\,(5x-15) > 0 \qquad x > 3$$

$\boldsymbol{x = 3}$ è il punto di minimo richiesto.

6. Calcola il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} (1-\cos x)^{sen\,x}$$

$$\lim_{x\to 0} e^{\ln(1-\cos x)^{senx}} = e^{\lim_{x\to 0} sen\,x \cdot \ln(1-\cos x)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\cos x)}{\frac{1}{senx}}} \overset{H}{=} e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen\,x}{1-\cos x}}{-\frac{\cos x}{sen^2 x}}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{-sen^3\,x}{\cos x - \cos^2 x}} =$$

$$\overset{H}{=} e^{\lim_{x\to 0}\frac{-3\,sen^2 x\cos x}{-sen\,x + 2\cos x\,sen\,x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{-3\,sen\,x\cos x}{-1+2\cos x}} = e^0 = \mathbf{1}$$

7. Si consideri la seguente equazione in x:

$$(k-2)\,x^2 - (2k-1)\,x + k + 1 = 0$$

dove k è un parametro reale diverso da 2. Indicate con x' e x'' le sue radici, calcolare i limiti di $x' + x''$ quando k tende a 2, a $+\infty$ e a $-\infty$.

Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di Ordinamento, Sessione suppletiva, 2005, Quesito 4

La somma delle due soluzioni, in un'equazione di secondo grado, è data dall'opposto del rapporto tra il coefficiente del termine di primo grado e il coefficiente del termine di secondo grado, perciò:

$$x' + x'' = \frac{2k-1}{k-2}$$

Possiamo così calcolare i limiti:

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{2k-1}{k-2} = \pm\infty \qquad\qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2k-1}{k-2} = \mathbf{2}$$