1. Determina l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, che ha vertice in $V\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ e passa per il punto $A\ (0;1)$.

L'equazione generica della parabola è: $y = ax^2 + bx + c$. Impongo il passaggio della parabola per il punto A e per il punto V, sostituendo le coordinate di entrambi nell'equazione generica e poi impongo la generica ascissa del vertice uguale al valore noto:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} = \frac{1}{9}a + \frac{1}{3}b + c \\ 1 = c \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 1 \\ b = -\frac{2}{3}a \\ \frac{1}{9}a - \frac{2}{9}a + 1 = \frac{2}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases} \qquad \boldsymbol{y = 3x^2 - 2x + 1}$$

2. Determina l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse x, passante per i punti $A\ (0;1)$, $B\ (-1;0)$ e $C\ (-1;2)$.

L'equazione generica della parabola è: $x = ay^2 + by + c$. Impongo il passaggio della parabola per i tre punti, sostituendo le loro coordinate nell'equazione generica:

$$\begin{cases} 0 = a + b + c \\ -1 = c \\ -1 = 4a + 2b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} c = -1 \\ b = -a + 1 \\ 4a - 2a + 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases} \qquad \boldsymbol{x = -y^2 + 2y - 1}$$

3. Determina l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, che ha fuoco in $F\ (3;2)$ e direttrice di equazione $y = -1$.

Posso procedere in due modi diversi:

<u>Primo modo</u>:
Pongo le coordinate generiche del fuoco e l'equazione generica della direttrice uguale ai valori noti e risolvo il sistema:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 3 \\ \frac{1-\Delta}{4a} = 2 \\ \frac{-1-\Delta}{4a} = -1 \end{cases} \qquad \frac{\frac{1-\Delta}{4a} = 2}{\frac{1+\Delta}{4a} = 1} \atop {\frac{2}{4a} = 3} \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = -6a = -1 \\ 1 + 1 - \frac{2}{3}c = \frac{2}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{y = \frac{1}{6}x^2 - x + 2}$$

<u>Secondo modo</u>:
Avendo la direttrice e il fuoco, posso determinare l'equazione della parabola usando la definizione di parabola come luogo geometrico, dato che la parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = |\,y+1\,| \qquad x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 2y + 1 \qquad \boldsymbol{y = \frac{1}{6}x^2 - x + 2}$$

4. Dati i punti $V\ (-3; 11)$ e $A\ (0; 2)$, determina:
   A. L'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, che ha vertice V e passa per A.
   B. L'equazione della retta tangente alla parabola nel suo punto di ascissa – 5.

A. L'equazione generica della parabola è: $y = ax^2 + bx + c$. Impongo il passaggio della parabola per il punto A e per il punto V, sostituendo le coordinate di entrambi nell'equazione generica e poi impongo la generica ascissa del vertice uguale al valore noto:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -3 \\ 11 = 9a - 3b + c \\ 2 = c \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 2 \\ b = 6a \\ 9a - 18a + 2 = 11 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = -6 \\ c = 2 \end{cases} \qquad \boldsymbol{y = -x^2 - 6x + 2}$$

B. Determino innanzi tutto le coordinate del punto, sostituendo l'ascissa nell'equazione della parabola:

$$y_P = -25 + 30 + 2 = 7$$

Siccome il punto $P(-5, 7)$ appartiene alla parabola, applico la formula di sdoppiamento per determinare l'equazione della tangente:

$$\frac{y + y_o}{2} = axx_o + b\frac{x + x_o}{2} + c$$

$$\frac{y + 7}{2} = -1\,(-5)x - 6\frac{x - 5}{2} + 2 \qquad y + 7 = 10x - 6x + 30 + 4 \qquad \boldsymbol{y = 4x + 27}$$

5. Trova la retta tangente alla parabola di equazione $y = x^2 + 2x + 4$ e parallela alla retta di equazione $y - 2x = 0$. Indicati con T il punto di tangenza, con V il vertice della parabola e con A il punto d'incontro della retta tangente con l'asse delle x, calcola l'area del triangolo AVT.

La generica retta parallela alla retta data ha equazione: $y = 2x + q$, la metto a sistema con l'equazione della parabola e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente:

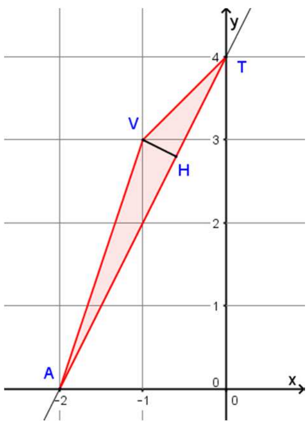
$$\begin{cases} y = x^2 + 2x + 4 \\ y = 2x + q \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + 2x + 4 = 2x + q \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4 - q = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta}{4} = q - 4 = 0$$

La retta tangente ha equazione: $t\colon\ y = 2x + 4$.
Determino i punti richiesti:

$$T \begin{cases} y = x^2 + 2x + 4 \\ y = 2x + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \qquad T\ (0; 4)$$

$$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad A\ (-2; 0)$$

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = (-1; 3)$$



L'altezza VH del triangolo è la distanza di V dalla retta t:

$$h = VH = d(V; t) = \frac{|-2 - 3 + 4|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \overline{AT} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

L'area del triangolo è:

$$A_{ATV} = \frac{d(V; t) \cdot \overline{AT}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{1}$$