$$y = \frac{1}{2x^5 - 8x^3}$$

Dominio: $2x^5 - 8x^3 \neq 0$ $\quad x^3(x^2-4) \neq 0$ $\quad \boldsymbol{D =]-\infty; -2[\cup]-2;\ 0[\cup]0;\ 2[\cup]2;\ +\infty[}$

La funzione non è dispari: $f(-x) = -f(x)$

Intersezioni con l'asse x: $\begin{cases} y = \frac{1}{2x^5-8x^3} \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \frac{1}{2x^5-8x^3} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad \textit{non ci sono intersezioni}$

Non ci sono intersezioni con l'asse y, visto che è escluso dal dominio.

Positività della funzione: $\frac{1}{x^3(2x^2-8)} > 0$ $\quad \begin{matrix} IF > 0: x > 0 \\ IIF > 0:\ x > 2 \\ IIIF > 0: x > -2 \end{matrix}$ $\quad \boldsymbol{-2 < x < 0 \ \vee \ x > 2}$

Ricerca di asintoti:

$$\lim_{x\to 2^{\pm}} \frac{1}{2x^3\,(x-2)(x+2)} = \pm\infty \qquad \boldsymbol{x = 2 \ asintoto\ verticale}$$

Per simmetria, anche $\boldsymbol{x = -2}$ è un asintoto verticale: $\lim_{x\to -2^{\pm}} \frac{1}{2x^3\,(x-2)(x+2)} = \mp\infty$

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{1}{2x^3\,(x-2)(x+2)} = \mp\infty \qquad \boldsymbol{x = 0 \ asintoto\ verticale}$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{2x^5 - 8x^3} = 0 \qquad \boldsymbol{y = 0 \ asintoto\ orizzontale}$$

Crescenza/decrescenza:

$$y' = -\frac{5x^4 - 12x^2}{2\,(x^5-4x^3)^2} = -\frac{x^2\,(5x^2-12)}{2\,x^2\,(x^4-4x^2)^2} = -\frac{5x^2-12}{2\,(x^4-4x^2)^2} = 0 \qquad \boldsymbol{x = \pm\frac{2}{5}\sqrt{15}}$$

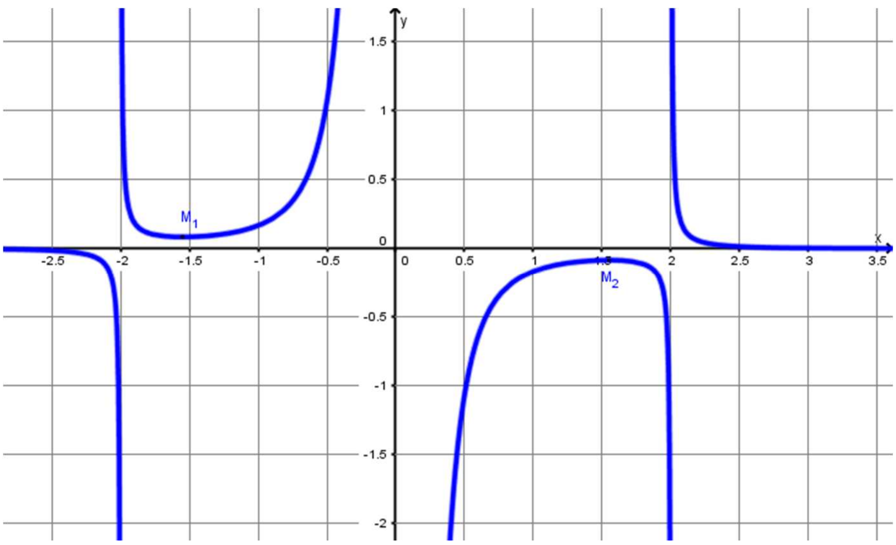
$$\boldsymbol{y' > 0} \qquad \boldsymbol{-\frac{2}{5}\sqrt{15} < x < \frac{2}{5}\sqrt{15}}$$

$\boldsymbol{M_1}\left(-\frac{2}{5}\sqrt{15}; \frac{25}{1152}\sqrt{15}\right)$ punto di minimo per la funzione, $\boldsymbol{M_2}\left(\frac{2}{5}\sqrt{15}; -\frac{25}{1152}\sqrt{15}\right)$ punto di massimo per la funzione.

Concavità:

$$y'' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{10x\,(x^4-4x^2)^2 - 2\,(x^4-4x^2)(4x^3-8x)(5x^2-12)}{(x^4-4x^2)^4} = -\frac{-15x^5+68x^3-96x}{(x^4-4x^2)^3} = \frac{15x^4-68x^2+96}{x^5(x^2-4)^3} > 0$$

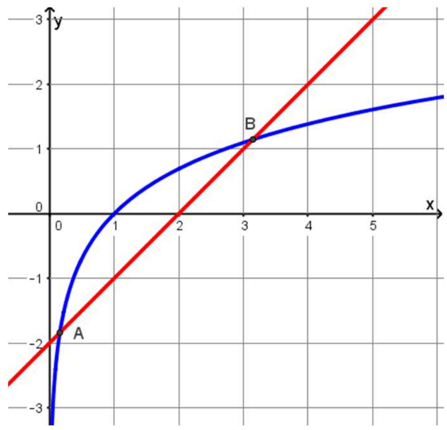
$\boldsymbol{-2 < x < 0 \ \vee \ x > 2 \ concavit\grave{a}\ verso\ l'alto}$ non ci sono punti di flesso per la funzione.



1. Se $f'(x) = \ln x - x + 2$, per quale dei seguenti valori approssimati di x, f ha un minimo relativo?

$(A)\ 5{,}146 \qquad (B)\ 3{,}146 \qquad (C)\ 1{,}000 \qquad (D)\ 0{,}159 \qquad (E)\ 0$

Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso PNI, Sessione ordinaria, 2014, Quesito 7



Devo risolvere graficamente la disequazione:

$$\ln x > x - 2$$

Che ha soluzione per:

$$x_A < x < x_B$$

perciò il punto di minimo ha ascissa x_A, che corrisponde alla risposta **D**.

2. Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate $(4; 0)$.

Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso PNI, Sessione ordinaria, 2011, Quesito 2

Il generico punto P della curva ha coordinate $P\left(x;\ \sqrt{x}\right)$, perciò:

$$f(x) = \overline{PA} = \sqrt{(x-4)^2 + x}$$

Calcolo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{2x - 7}{2\sqrt{x^2 - 7x + 16}} > 0$$

$$2x - 7 > 0 \qquad x > \frac{7}{2}$$

La funzione ha un punto di minimo in $x = \frac{7}{2}$, perciò il punto P ha coordinate: $\boldsymbol{P\left(\frac{7}{2}; \frac{\sqrt{14}}{2}\right)}$.

3. Si calcoli:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2}$$

Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso PNI, Sessione ordinaria, 2012, Quesito 1

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{8^x-81^x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{81^x\left(\left(\frac{8}{81}\right)^x-1\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{81^x}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{8}{81}\right)^x-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{8}{81}\right)^x-1}{x}=\lim_{y\to 0^+}\frac{y}{\log_{\frac{8}{81}}(y+1)}=\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{\log_{\frac{8}{81}}(y+1)^{\frac{1}{y}}}=\frac{1}{\log_{\frac{8}{81}}e}=\frac{1}{\ln\frac{8}{81}}<0$$

Usando la sostituzione:

$$\left(\frac{8}{81}\right)^x-1=y \qquad x=\log_{\frac{8}{81}}(y+1)$$

Perciò:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{8^x-81^x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{81^x}{x}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{8}{81}\right)^x-1}{x}=-\infty$$

4. Si dimostri che la curva di equazione $y=x^3+ax+b$ ha uno ed un solo punto di flesso rispetto a cui è simmetrica.

Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso PNI, Sessione ordinaria, 2012, Quesito 6

Determiniamo le coordinate del punto di flesso:

$$y'=3x^2+a \qquad y''=6x>0 \qquad x_F=0$$

Il punto di flesso ha coordinate:

$$F(0;b)$$

La simmetria ha equazione:

$$\begin{cases} x'=-x \\ y'=2b-y \end{cases}$$

Sostituendo nella funzione, verificherò che ottengo la funzione data: cioè, facendo la simmetria rispetto al flesso, ottengo di nuovo la funzione, che risulta quindi simmetrica rispetto al flesso:

$$2b-y=-x^3-ax+b \qquad y=x^3+ax+b \qquad c.v.d.$$

5. Se la funzione $f(x) - f(2x)$ ha derivata 5 in $x = 1$ e derivata 7 in $x = 2$, qual è la derivata di $f(x) - f(4x)$ in $x = 1$?

Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso PNI, Sessione ordinaria, 2013, Quesito 2

Facendo le derivate delle funzioni ottengo:

$$f'(x) - 2\,f'(2x) \qquad\qquad f'(x) - 4\,f'(4x)$$

Perciò:

$$f'(1) - 2\,f'(2) = 5 \quad\Rightarrow\quad f'(1) = 5 + 2\,f'(2)$$

$$f'(2) - 2\,f'(4) = 7 \quad\Rightarrow\quad f'(4) = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2}f'(2)$$

Ora posso ottenere il valore della derivata della seconda funzione in x = 1:

$$f'(1) - 4\,f'(4) = 5 + 2\,f'(2) - 4\left(-\frac{7}{2} + \frac{1}{2}f'(2)\right) = 5 + 2\,f'(2) + 14 - 2\,f'(2) = \mathbf{19}$$

6. Si stabilisca per quali valori reali di a e b, si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a+bx}-2}{x} = 1$$

Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso PNI, Sessione ordinaria, 2014, Quesito 10

Perché il limite dia il valore richiesto, il numeratore deve essere tale per cui:

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{a+bx}-2\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{a} - 2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{a = 4}$$

Procedendo con il calcolo del limite, possiamo razionalizzare:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+bx}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{4+bx}+2}{\sqrt{4+bx}+2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{bx}{x\left(\sqrt{4+bx}+2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{b}{\sqrt{4+bx}+2} = \frac{b}{4}$$

Concludendo:

$$\frac{b}{4} = 1 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{b = 4}$$

7. Si provi che per la funzione $f(x) = x^3 - 8$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$, sono verificate le condizioni di validità del teorema di Lagrange e si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.

Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di Ordinamento, Sessione suppletiva, 2007, Quesito 4

Perché la funzione soddisfi il teorema di Lagrange, deve essere continua in $[0, 2]$ e derivabile in $]0; 2[$. Considerato che si tratta di una funzione polinomiale, le due ipotesi sono verificate, perciò vale la tesi e quindi possiamo determinare il punto c tale per cui:

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$3c^2 = \frac{0 - (-8)}{2} \qquad c^2 = \frac{4}{3} \qquad c = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Il punto interno all'intervallo è $\boldsymbol{c = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$.