1. In un apparecchio di Cavendish vi sono due masse, rispettivamente di 12 kg e 15 g, a distanza di 5,0 cm l'una dall'altra. Qual è la forza di attrazione tra le due masse? A che distanza devono essere posti i centri delle masse perché la forza sia dimezzata?

$$m_1 = 12\ kg \qquad m_2 = 15\ g \qquad r = 5{,}0\ cm \qquad F? \qquad F' = \frac{1}{2}F \qquad r'?$$

Applicando la legge di gravitazione universale:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = \mathbf{4{,}8 \cdot 10^{-9}\ N}$$

Considerando che la forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza, perché la forza dimezzi il raggio deve aumentare di un fattore $\sqrt{2}$:

$$F' = \frac{1}{2}F \quad \Rightarrow \quad G\frac{m_1 m_2}{r'^2} = \frac{1}{2}G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad r'^2 = 2\,r^2 \quad \Rightarrow \quad r' = \mathbf{\sqrt{2}\,r}$$

2. Un razzo lanciato verso la Luna si arresta nel punto in cui la forza di attrazione gravitazionale dovuta alla Terra e quella dovuta alla Luna hanno lo stesso modulo e la stessa direzione ma versi opposti. In quale punto del segmento che unisce il centro della Terra e il centro della Luna si trova il razzo?

$$M_T = 6{,}0\ \cdot 10^{24}\ kg \qquad M_L = 7{,}3\ \cdot 10^{22}\ kg \qquad d_{TL} = 3{,}8 \cdot 10^8\ m \qquad F_L = F_T \qquad x = d_{RT}?$$

Considerando che le due forze devono essere uguali in modulo, considero x la distanza tra la Terra e il razzo e $d - x$ la distanza tra la Luna e il razzo, ottenendo quindi:

$$G\frac{M_L m}{(d-x)^2} = G\frac{M_T m}{x^2} \quad \Rightarrow \quad M_L x^2 = M_T (d-x)^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{M_L}\,x = \sqrt{M_T}\,(d-x)$$

$$x\left(\sqrt{M_L} + \sqrt{M_T}\right) = d\sqrt{M_T} \quad \Rightarrow \quad x = d\frac{\sqrt{M_T}}{\sqrt{M_T} + \sqrt{M_L}} = \mathbf{3{,}4 \cdot 10^8\ m}$$

3. Un carrellino giocattolo di massa 0,50 kg si muove a velocità costante tirato da una forza di 2,0 N su una superficie liscia orizzontale posta sulla Terra con coefficiente di attrito μ. Calcola il coefficiente di attrito della superficie. Quale forza sarebbe necessaria per tirare lo stesso carrellino alla stessa velocità su un'identica superficie posta però sul pianeta Saturno?

$$m = 0{,}50\ kg \qquad F = 2{,}0\ N \qquad \mu? \qquad M_S = 5{,}71 \cdot 10^{26}\ kg \qquad r_S = 6{,}03 \cdot 10^7\ m \qquad F_S?$$

Siccome il carrellino si muove a velocità costante, la forza con cui viene tirato è uguale alla forza di attrito. La forza di attrito è inoltre data dalla forza premente (in questo caso la forza peso) moltiplicata per il coefficiente di attrito, perciò:

$$F_a = F = mg\,\mu \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{F}{mg} = \mathbf{0{,}41}$$

Su Saturno agisce una accelerazione di gravità rispetto a quella della Terra, perciò consideriamo come forza premente quella di attrazione gravitazionale tra il carrellino e Saturno. Inoltre, una volta determinata la forza di attrazione gravitazionale, moltiplicandola per il coefficiente di attrito, determino la forza con la quale il carrellino dovrebbe essere tirato, valendo anche in questo caso il ragionamento fatto precedentemente:

$$F_S = F_a' = \mu G\frac{m\,M_S}{r_S^2} = \mathbf{2{,}1\ N}$$

4. L'orbita di Galatea, satellite di Nettuno, si può approssimare ad una circonferenza e la sua velocità è di $8{,}89 \cdot 10^3\ m/s$. Qual è la distanza di Galatea dal pianeta?

$$M_N = 1{,}026 \cdot 10^{26}\ kg \qquad r_N = 24{,}776 \cdot 10^6\ m \qquad v = 8{,}89 \cdot 10^3\ m/s \qquad d?$$

La forza di attrazione gravitazionale è la forza centripeta che mantiene in orbita Galatea attorno a Nettuno, perciò:

$$m\frac{v^2}{d + r_N} = G\frac{m\,M_N}{(d + r_N)^2} \quad \Rightarrow \quad d + r_N = G\frac{M_N}{v^2} \quad \Rightarrow \quad d = G\frac{M_N}{v^2} - r_N = \mathbf{61{,}8 \cdot 10^6\ m}$$

5. Mercurio dista $46{,}0 \cdot 10^6\ m$ dal Sole in perielio, e $69{,}8 \cdot 10^6\ m$ in afelio. La velocità massima che raggiunge è $59{,}0\ km/s$. Qual è la velocità minima di Mercurio? Dove la raggiunge?

$$r_1 = 46{,}0 \cdot 10^6\ km \qquad r_2 = 69{,}8 \cdot 10^6\ km \qquad v_1 = 59{,}0\ km/s \qquad v_2?$$

Per la conservazione del momento angolare:

$$L_1 = L_2 \quad \Rightarrow \quad mr_1v_1 = mr_2v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_1\frac{r_1}{r_2} = \mathbf{3{,}89 \cdot 10^4\ m/s}$$

La velocità minima viene raggiunta nella posizione di **afelio**, ovvero nel punto più distante dal Sole, come previsto dalla seconda legge di Keplero.

6. Un punto distante 600 km dalla superficie di Marte risente del campo gravitazionale del pianeta con intensità pari a $2{,}7\ m/s^2$. La massa di Marte è $6{,}42 \cdot 10^{23}\ kg$. Ricava il raggio del pianeta.

$$d = 600\ km \qquad g_M = 2{,}7\ m/s^2 \qquad m_M = 6{,}42 \cdot 10^{23}\ kg \qquad r_M?$$

Per la definizione di campo gravitazionale:

$$g = G\frac{m_M}{(r_M + d)^2} \quad \Rightarrow \quad r_M + d = \sqrt{G\frac{m_M}{g}} \quad \Rightarrow \quad r_M = \sqrt{G\frac{m_M}{g}} - d = \mathbf{3{,}4 \cdot 10^6\ m}$$

7. Mercurio orbita attorno al Sole a una distanza che varia da $46 \cdot 10^6\ m$ in perielio a $70 \cdot 10^6\ m$ in afelio. Calcola la variazione di energia potenziale gravitazionale tra afelio e perielio.

$$r_1 = 46 \cdot 10^6\ km \qquad r_2 = 70 \cdot 10^6\ km \qquad U_2 - U_1?$$

Per la definizione di energia potenziale gravitazionale:

$$U_2 - U_1 = -G\frac{m_M m_S}{r_2} + G\frac{m_M m_S}{r_1} = \mathbf{3{,}3 \cdot 10^{35}\ J}$$