Problema 1

Data la funzione $f(x) = \frac{ax^3+6x^2+b}{cx^2}$, con $a, b \neq 0$:

A. determina i coefficienti a, b, c in modo che il punto $M\ (-2; 0)$ sia un massimo relativo e la retta $2x - 3y + 6 = 0$ sia asintoto obliquo;

B. esegui lo studio e disegna il grafico;

C. calcola l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico di f, dall'asse delle ascisse e dalla retta $x - 4 = 0$.

A. La funzione passa per il punto M, ha nel punto M un massimo, perciò la sua derivata prima ($f'(x) = \frac{3ax^4+12x^3-2ax^4-12x^3-2bx}{cx^4}$) calcolata in M sarà nulla ed inoltre sappiamo che il coefficiente angolare dell'asintoto obliquo è 2/3:

$$\begin{cases} \dfrac{-8a+24+b}{4c} = 0 \\ f'(-2) = \dfrac{-8a-2b}{-8c} = 0 \\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^3+6x^2+b}{cx^3} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 8a - 24 \\ b = -4a \\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a = 2} \\ \boldsymbol{b = -8} \\ \boldsymbol{c = 3} \end{cases} \qquad y = \frac{2x^3+6x^2-8}{3x^2}$$

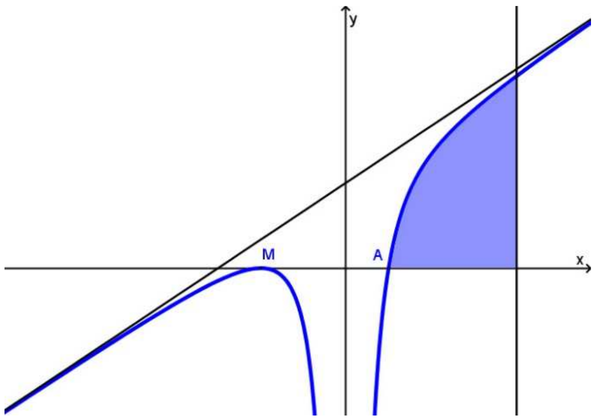
B. Studiamo la funzione:

Dominio: $D =]-\infty; 0[\ \cup\ ]0; +\infty[$

Intersezioni con gli assi: $\begin{cases} y = \frac{2x^3+6x^2-8}{3x^2} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3+3x^2-4 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

	1	3	0	−4
1		1	4	4
	1	4	4	0

$M\ (-2; 0) \qquad A\ (1; 0)$



Positività: $\frac{2x^3+6x^2-8}{3x^2} > 0 \qquad \frac{2}{3}\frac{(x-1)(x+2)^2}{x^2} > 0 \qquad x > 1$

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{2}{3}\frac{(x-1)(x+2)^2}{x^2} = -\infty \qquad x = 0 \quad asintoto\ verticale$$

Asintoto obliquo: $2x - 3y + 6 = 0$

$$y' = \frac{6x^4+12x^3-4x^4-12x^3+16x}{3x^4} = \frac{2}{3}\frac{x^3+8}{x^3} > 0$$

Ovvero la funzione è crescente per $x < -2 \quad \vee \quad x > 0$ e ha un punto di massimo in $M(-2; 0)$, come ribadito anche nel testo.

$$y'' = \frac{16}{3}\left(-\frac{3}{x^4}\right) = -\frac{16}{x^4} > 0$$

La funzione ha concavità rivolta sempre verso il basso.

C. L'area è quella colorata nel grafico, perciò:

$$\int_1^4 \frac{2x^3+6x^2-8}{3x^2}\,dx = \frac{2}{3}\int_1^4 \left(x + 3 - \frac{4}{x^2}\right) dx = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{4}{x}\right]_1^4 = \frac{2}{3}\left(8 + 12 + 1 - \frac{1}{2} - 3 - 4\right) = \mathbf{9}$$

Problema 2

Un vaso da fiori ha il profilo mostrato nel grafico della figura 1, dove le misure sono in centimetri. Il profilo è costituito da:

- un arco di parabola per $0 \leq x \leq 7$;
- una funzione omografica per $7 < x \leq 12$.

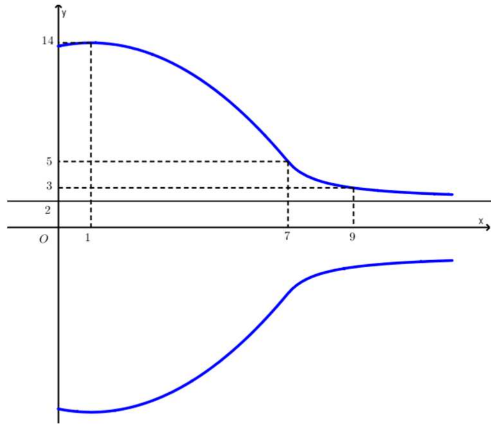
A. Determina l'equazione del profilo del vaso.

B. Verifica che si tratta di una funzione continua e derivabile in tutto il suo dominio.

C. Calcola l'area di una sezione del vaso, in dm^2.

D. Determina la massima capienza del vaso, in dm^3. Il vaso può contenere un litro di acqua?

A. Determino innanzi tutto l'equazione della parabola, di equazione generica $y = ax^2 + bx + c$, con vertice in $(1; 14)$ e passante per i punto $(7; 5)$ (come indicato nella figura):



$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ 14 = a + b + c \\ 5 = 49a + 7b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -2a \\ c = 14 + a \\ 49a - 14a + 14 + a = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{55}{4} \end{cases}$$

La parabola ha equazione: $\boldsymbol{y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{55}{4}}$

Della funzione omografica, invece, so che ha equazione generica $y = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}}$ e impongo il passaggio per $(7; 5)$, $(9; 3)$ e dal grafico evinco che ha asintoto orizzontale $y = 2$, perciò: $\frac{a}{c} = 2$.

$$\begin{cases} \dfrac{a}{c} = 2 \\ 5 = \dfrac{14 + \frac{b}{c}}{7 + \frac{d}{c}} \\ 3 = \dfrac{18 + \frac{b}{c}}{9 + \frac{d}{c}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{a}{c} = 2 \\ 35 + 5\dfrac{d}{c} = 14 + \dfrac{b}{c} \\ 27 + 3\dfrac{d}{c} = 18 + \dfrac{b}{c} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{a}{c} = 2 \\ 8 + 2\dfrac{d}{c} = -4 \\ \dfrac{b}{c} = 9 + 3\dfrac{d}{c} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{a}{c} = 2 \\ \dfrac{d}{c} = -6 \\ \dfrac{b}{c} = -9 \end{cases} \qquad \boldsymbol{y = \frac{2x - 9}{x - 6}}$$

B. Le due funzioni sono continue negli intervalli di definizione ed entrambe passano per il punto $(7; 5)$, perciò **la funzione è continua**.

Verifichiamo se è derivabile:

$$y = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{55}{4} & 0 \leq x \leq 7 \\ \dfrac{2x - 9}{x - 6} & 7 < x \leq 12 \end{cases} \qquad y' = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-3}{(x - 6)^2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 7^-} \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = -3 \qquad \lim_{x \to 7^+} \frac{-3}{(x - 6)^2} = -3$$

La funzione è derivabile.

C. Per determinare l'area della sezione del vaso, calcoliamo l'area sottesa dal grafico, moltiplicandola per 2:

$$S=2\left(\int_0^7\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{55}{4}\right)dx+\int_7^{12}\frac{2x-9}{x-6}\,dx\right)=2\left[-\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{55}{4}x\right]_0^7+2\int_7^{12}\frac{2x-12+3}{x-6}\,dx=$$

$$=\frac{7}{2}\left(-\frac{49}{3}+7+55\right)+2\,[2x+3\ln|x-6|]_7^{12}=\frac{959}{6}+2\,(10+3\ln 6)=\frac{1079}{6}+6\ln 6$$

La misura ottenuta è espressa in cm², perciò dobbiamo eseguire l'equivalenza per ottenere il risultato in dm²:

$$S=\left(\frac{1079}{6}+6\ln 6\right)cm^2=\mathbf{1,91\ dm^2}$$

D. Determino ora il volume:

$$V=\pi\left(\int_0^7\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{55}{4}\right)^2dx+\int_7^{12}\left(\frac{2x-9}{x-6}\right)^2\,dx\right)=$$

$$=\pi\int_0^7\left(\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^2+\frac{55^2}{16}-\frac{1}{4}x^3-\frac{55}{8}x^2+\frac{55}{4}x\right)dx+\pi\int_7^{12}\left(4+\frac{9}{(x-6)^2}+\frac{12}{x-6}\right)dx=$$

$$=\pi\left[\frac{1}{80}x^5-\frac{1}{16}x^4-\frac{53}{24}\,x^3+\frac{55}{8}x^2+\frac{55^2}{16}x\right]_0^7+\pi\left[4x-\frac{9}{x-6}+12\ln|x-6|\right]_7^{12}=$$

$$=\frac{231091}{240}\,\pi+20\,\pi-\frac{3}{2}\pi+9\,\pi+12\,\pi\ln 6=\frac{237691}{240}\,\pi+12\,\pi\ln 6$$

La misura è espressa in cm³, perciò trasformiamo in dm³:

$$V=\left(\frac{237691}{240}\,\pi+12\,\pi\ln 6\right)cm^3=\mathbf{3,18\ dm^3}$$

Il vaso può contenere non solo un litro d'acqua, visto che può arrivare a 3L.

Questionario

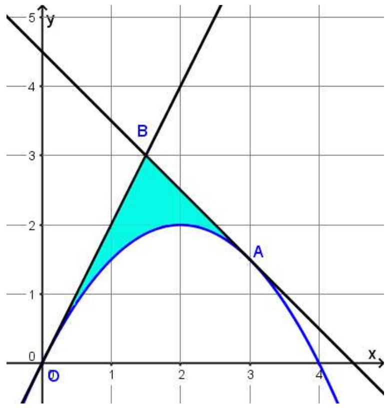
1. Le rette r e s sono tangenti alla parabola di equazione $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$ rispettivamente nel punto di ascissa 0 e nel punto di ascissa 3. Trova l'area del triangolo mistilineo che ha per lati rettilinei le due rette e per lato curvo la parabola.

Il punto della parabola di ascissa nulla è l'origine O, mentre il punto di ascissa 3 è: $A\left(3;\frac{3}{2}\right)$.
Determino le due tangenti alla parabola, calcolando la derivata della parabola e, sostituendo le ascisse dei due punti O e A, trovo il coefficiente angolare di r e s rispettivamente. Successivamente, uso la formula della retta passante per un punto e di coefficiente angolare noto:

$$y'=-x+2$$

$$r: y-y_o=f'(x_o)\,(x-x_o) \qquad y-0=2\,(x-0) \qquad y=2x$$

$$s: y-y_A=f'(x_A)\,(x-x_A) \qquad y-\frac{3}{2}=-1\,(x-3) \qquad y=-x+\frac{9}{2}$$



La situazione è rappresentata a lato. Determino l'ascissa del punto B, intersezione delle due rette tangenti:

$$\begin{cases} y=2x \\ y=-x+\frac{9}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x=-x+\frac{9}{2} \\ y=2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=3 \end{cases}$$

A questo punto, posso calcolare l'area:

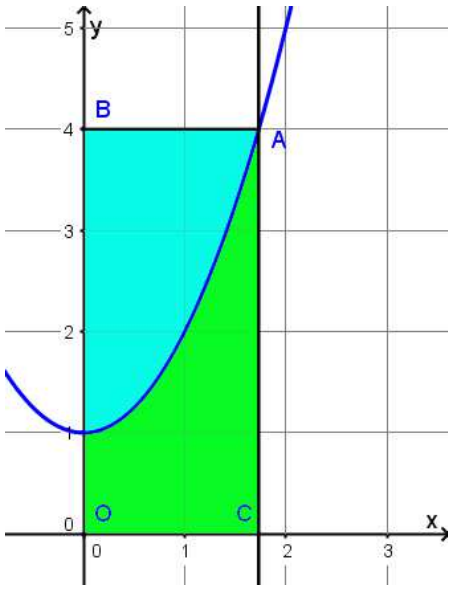
$$\int_0^{\frac{3}{2}}\left(2x+\frac{1}{2}x^2-2x\right)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left(-x+\frac{9}{2}+\frac{1}{2}x^2-2x\right)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}x^2\right)dx+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left(\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{9}{2}\right)dx=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^{\frac{3}{2}}+\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x\right]_{\frac{3}{2}}^{3}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{27}{8}+\frac{1}{6}\cdot 27-\frac{3}{2}\cdot 9+\frac{9}{2}\cdot 3-\frac{1}{6}\cdot\frac{27}{8}+\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}-\frac{9}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{2}+\frac{27}{8}-\frac{27}{4}=\frac{9}{8}\,(4+3-6)=\boldsymbol{\frac{9}{8}}$$

2. Determina il valore positivo di a tale che la parabola $y=x^2+1$ divida in due parti equivalenti l'area del rettangolo con vertici $(0;0)$, $(a;0)$, $(0;a^2+1)$ e $(a;a^2+1)$.

USA Harvard – MIT Mathematics Tournament, HMMT



I punti indicati, vertici del rettangolo, sono:

$$O(0;0) \quad C(a;0) \quad A\,(a;a^2+1) \quad B\,(0;a^2+1)$$

Il rettangolo viene diviso in due parti (indicate in verde e in azzurro nella figura) che sono tra loro equivalenti, perciò, visto che l'area del rettangolo è $a\,(a^2+1)$:

$$\int_0^a(x^2+1)\,dx=\frac{1}{2}a\,(a^2+1)$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^a=\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{2}a$$

$$\frac{1}{3}a^3+a=\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{2}a \qquad a^3-3a=0 \qquad a\,(a^2-3)=0$$

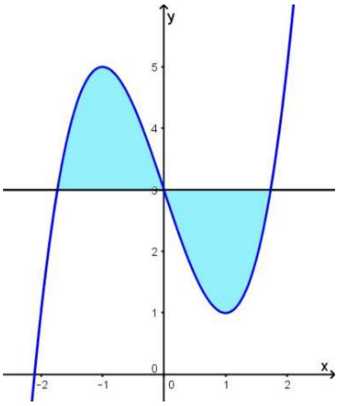
Tre sono le soluzioni dell'equazione:

$$a_1=0 \qquad a_2=\sqrt{3} \qquad a_3=-\sqrt{3}$$

La soluzione richiesta è: $\boldsymbol{a=\sqrt{3}}$.

3. Determina il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $y = 3$ della regione di piano delimitata dalla curva di equazione $y = x^3 - 3x + 3$ e dalla retta stessa.

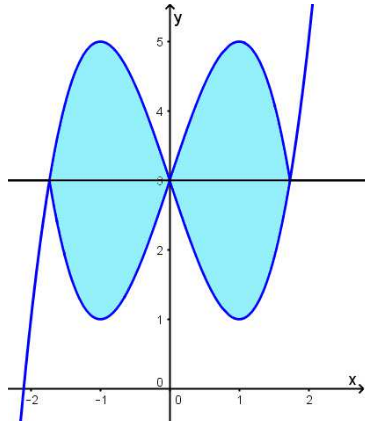
Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione straordinaria, 2015, quesito 1



La curva incontra la retta nel suo centro di simmetria. Il solido generato dalla rotazione attorno alla retta è costituito da due parti perfettamente uguali, data la simmetria della curva. Per questo motivo, è sufficiente determinare il volume della rotazione di una delle due parti e poi moltiplicarlo per due:

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (3 - x^3 + 3x - 3)^2 \, dx$$

dove $(\pm\sqrt{3}; 3)$ sono le coordinate dei punti di intersezione tra la curva data e la retta $y = 3$.

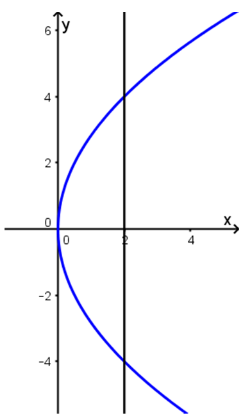


$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (-x^3 + 3x)^2 \, dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} (x^6 - 6x^4 + 9x^2) \, dx = 2\pi \left[\frac{1}{7}x^7 - \frac{6}{5}x^5 + 3x^3\right]_0^{\sqrt{3}} =$$

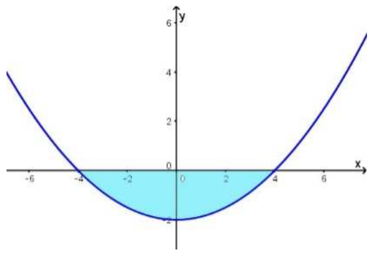
$$= 2\pi \cdot 9\sqrt{3} \left(\frac{3}{7} - \frac{6}{5} + 1\right) = 18\sqrt{3}\,\pi \cdot \frac{15 - 42 + 35}{35} = \boldsymbol{\frac{144}{35}\sqrt{3}\,\pi}$$

4. Determina il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta di equazione $x = 2$ della parte di piano delimitata dalla parabola di equazione $y^2 = 8x$ e dalla retta stessa.

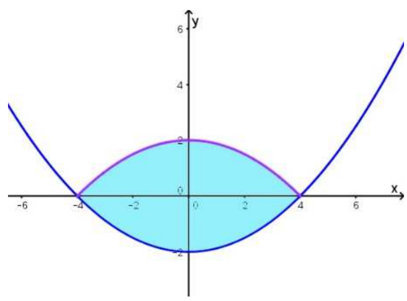
Esame di Stato, Liceo Scientifico, Corso di ordinamento, Sessione suppletiva, 2015, quesito 5



Ecco la rappresentazione del problema.



Per rendere la situazione più semplice, possiamo rappresentarla rispetto all'asse x, traslando la parabola, in modo che l'asse x coincida con la retta $x = 2$ del testo.



A questo punto diventa facile calcolare il volume richiesto.

$$V = 2\pi \int_0^4 \left(-\frac{1}{8}x^2 + 2\right)^2 dx = 2\pi \int_0^4 \left(\frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4\right) dx = 2\pi \left[\frac{1}{320}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + 4x\right]_0^4 =$$

$$= 32\pi \left(\frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{320} - \frac{4}{6} + 1\right) = 32\pi \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1\right) = \boldsymbol{\frac{256}{15}\pi}$$

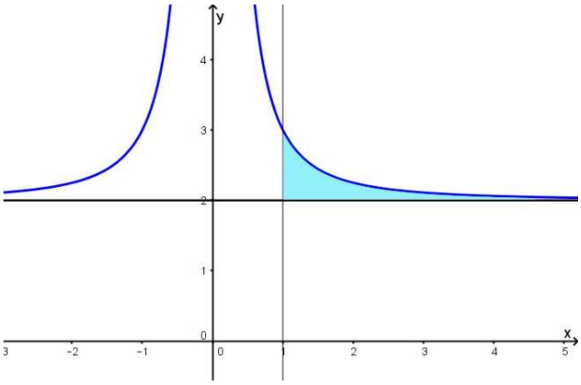
5. Dopo aver rappresentato graficamente la funzione $y = \frac{2x^2+1}{x^2}$, determina l'area della regione illimitata compresa fra il grafico e l'asintoto orizzontale della funzione, i cui punti hanno ascissa maggiore di 1.

La funzione è algebrica razionale fratta. Il dominio è $D = \mathbb{R} - \{0\}$, è sempre positiva, non ha intersezioni con gli assi e ha come asintoto orizzontale la retta $y = 2$ e come asintoto verticale l'asse y:

$$\lim_{x\to0^\pm} \frac{2x^2+1}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+1}{x^2} = 2$$

$$y' = \frac{4x^3 - 4x^3 - 2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} \qquad y'' = \frac{6}{x^4}$$

La funzione è crescente nel secondo quadrante e decrescente nel primo quadrante. Non ha punti stazionari. La sua concavità è sempre rivolta verso l'alto.



Rappresentata la funzione, posso procedere al calcolo dell'area:

$$A = \int_1^{+\infty} \left(\frac{2x^2+1}{x^2} - 2\right) dx = \lim_{z\to+\infty} \int_1^z \left(2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) dx =$$

$$= \lim_{z\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^z = \lim_{z\to+\infty} \left(-\frac{1}{z} + 1\right) = \mathbf{1}$$

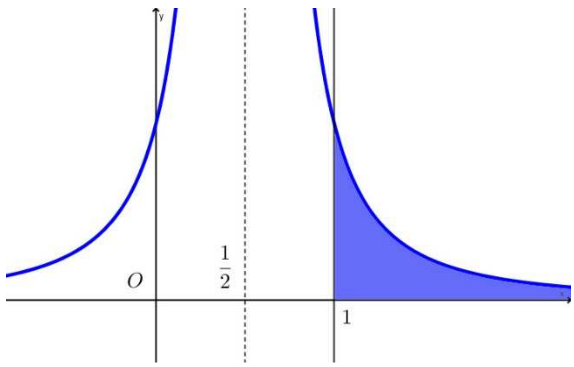
6. Nel grafico della figura 2 è rappresentata la funzione $y = \frac{1}{(ax+b)^2}$. Determina a e b, sapendo che la regione illimitata colorata ha area ½.

Il testo mi dà come indicazione:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(ax+b)^2}\, dx = \frac{1}{2}$$

Il grafico mi dice che:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{1}{(ax+b)^2} = +\infty$$



E da queste informazioni deduco:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} (ax+b)^2 = 0 \\ \lim\limits_{z\to+\infty} \int_1^z \frac{1}{(ax+b)^2}\, dx = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(\frac{1}{2}a + b\right)^2 = 0 \\ \lim\limits_{z\to+\infty} \left[-\frac{1}{a(ax+b)}\right]_1^z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -2b \\ \lim\limits_{z\to+\infty} \left[-\frac{1}{a(az+b)} + \frac{1}{a^2+ab}\right] = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -2b \\ \frac{1}{a^2+ab} = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -2b \\ 4b^2 - 2b^2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{a = \mp 2} \\ \boldsymbol{b = \pm 1} \end{cases}$$