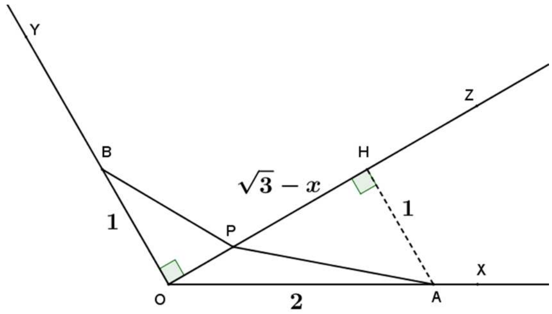
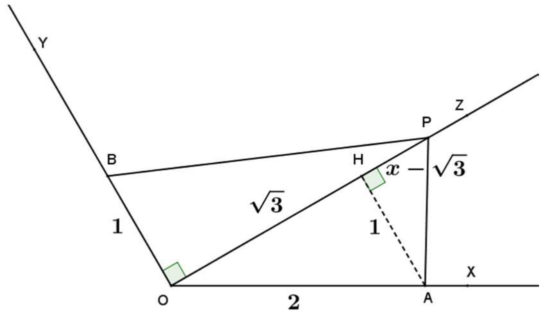
1. L'angolo $X\hat{O}Y$ ha ampiezza 120°; presi un punto A su OX e un punto B su OY in modo che i segmenti OA e OB misurino rispettivamente 2 e 1, considera la semiretta OZ interna all'angolo $X\hat{O}Y$ e perpendicolare a OY. Determina la funzione $y = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ al variare di P su OZ (poni $\overline{OP} = x$) e rappresentala graficamente mettendo in evidenza il tratto relativo al problema. Trova il valore di y quando il quadrilatero BOAP ha perimetro 6.

Se $\overline{OP} = x$, allora necessariamente $\boldsymbol{x \geq 0}$. Nel caso in cui sia zero, infatti, la funzione assume valore 5, che è un valore accettabile.

Nel caso generale, possono presentarsi due diverse situazioni, che dal punto di vista della funzione sono equivalenti:





Nel primo caso, procediamo a determinare il valore dei due segmenti richiesti. Nel caso di $\overline{PB}$, usiamo il teorema di Pitagora sul triangolo rettangolo OPB, perciò: $\overline{PB} = \sqrt{1+x^2}$. Nel caso di $\overline{PA}$, consideriamo il triangolo rettangolo AHP, dove H è la proiezione di A sulla semiretta OZ: considerato che l'angolo $A\hat{O}H$ ha ampiezza 30° (visto che è la differenza tra l'angolo di 120° e l'angolo retto), il triangolo OAH è la metà di un triangolo equilatero, perciò AH ha misura 1 e, dal teorema di Pitagora, ottengo che $\overline{OH} = \sqrt{3}$ e, per differenza, $\overline{PH} = \overline{OH} - \overline{OP} = \sqrt{3} - x$. Perciò, sempre applicando il teorema di Pitagora al triangolo PAH: $\overline{PA} = \sqrt{1 + \left(\sqrt{3} - x\right)^2}$.

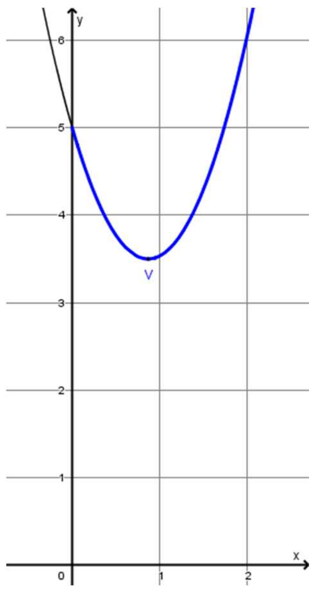
Nel secondo caso, non cambia nulla per quanto riguarda il segmento $\overline{PB}$. Per quanto riguarda $\overline{PA}$, invece, la proiezione H di A sulla semiretta OZ cade all'interno del segmento OP, perciò AH ha misura 1 (per quanto detto prima) e, dal teorema di Pitagora, ottengo che $\overline{OH} = \sqrt{3}$: Per differenza, $\overline{PH} = \overline{OP} - \overline{OH} = x - \sqrt{3}$. Perciò, sempre applicando il teorema di Pitagora al triangolo PAH: $\overline{PA} = \sqrt{1 + \left(x - \sqrt{3}\right)^2}$, che è lo stesso valore ottenuto prima.

Possiamo a questo punto determinare la funzione:

$$y = \left(\sqrt{1+x^2}\right)^2 + \left(\sqrt{1+\left(\sqrt{3}-x\right)^2}\right)^2 = 1 + x^2 + 1 + 3 + x^2 - 2x\sqrt{3}$$

Ecco quindi la funzione:

$$\boldsymbol{y = 2x^2 - 2x\sqrt{3} + 5}$$



Si tratta di una parabola di vertice $V\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{7}{2}\right)$, che possiamo rappresentare solo nel primo quadrante (dato che $x \geq 0$).

Se il quadrilatero BOAP ha perimetro 6, allora $\overline{PA} + \overline{PB} = 3$. Determino quindi x e, di conseguenza, y:

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+\left(\sqrt{3}-x\right)^2} = 3$$

$$\sqrt{1+\left(\sqrt{3}-x\right)^2} = 3 - \sqrt{1+x^2}$$

$$1 + 3 - 2x\sqrt{3} + x^2 = 9 + 1 + x^2 - 6\sqrt{1+x^2}$$

$$3 + x\sqrt{3} = 3\sqrt{1+x^2} \qquad 9 + 6x\sqrt{3} + 3x^2 = 9 + 9x^2 \qquad x\left(x - \sqrt{3}\right) = 0$$

Il perimetro di BOAP è uguale a 6,quando $\overline{OP} = x = \sqrt{3}$ e, sostituendo l'ascissa nella funzione, otteniamo l'ordinata:

$$y = 6 - 6 + 5 = \boldsymbol{5}$$

2. Risolvi uno dei seguenti sistemi parametrici:

$$\begin{cases}\sqrt{25-x^2}-\frac{x}{7}=k\\ -4<x\leq 3\end{cases} \qquad \begin{cases}x^2-kx-1=0\\ -1<x\leq 2\end{cases}$$

A. $\begin{cases}\sqrt{25-x^2}-\frac{x}{7}=k\\ -4<x\leq 3\end{cases}$ $\qquad \begin{cases}y=\sqrt{25-x^2}\\ y-\frac{x}{7}=k\\ -4<x\leq 3\end{cases}$

Si tratta di una semicirconferenza con centro nell'origine e raggio 5 e un fascio di rette parallele.

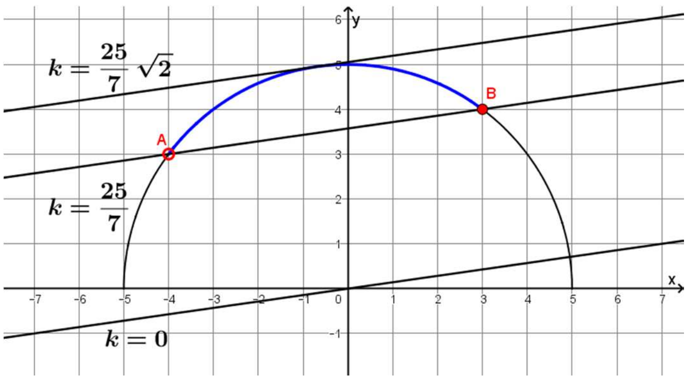
I due punti limite sono $A\ (-4;3)$ e $B\ (3;4)$. Impongo il passaggio per i due punti limite:

$$A\ (-4;3):\ 3+\frac{4}{7}=k \qquad k=\frac{25}{7}$$

$$B\ (3;4):\ 4-\frac{3}{7}=k \qquad k=\frac{25}{7}$$

Per $k=\frac{25}{7}$ ho una sola soluzione accettabile.

Determino l'equazione della retta tangente, ponendo la distanza di una generica retta del fascio dal centro della circonferenza, l'origine, uguale al raggio, 5:



$$\frac{|0+0+k|}{\sqrt{1+\frac{1}{49}}}=5 \qquad |k|=5\sqrt{\frac{50}{49}} \qquad k=\frac{25}{7}\sqrt{2}$$

Scelgo il valore positivo, visto il comportamento del fascio. Posso concludere:

$$\mathbf{1\ soluzione\ per\ } k=\frac{25}{7} \qquad \mathbf{2\ soluzioni\ per\ } \frac{25}{7}<k\leq\frac{25}{7}\sqrt{2}$$

B. $\begin{cases}x^2-kx-1=0\\ -1<x\leq 2\end{cases}$ $\qquad \begin{cases}y=x^2\\ y-kx-1=0\\ -1<x\leq 2\end{cases}$

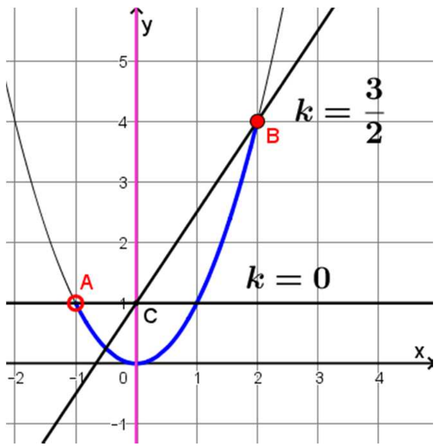
Si tratta di una parabola con vertice nell'origine e un fascio proprio di rette di centro $C(0,1)$.

I due punti limite sono $A\ (-1;1)$ e $B\ (2;4)$. Impongo il passaggio per i due punti limite:

$$A\ (-1;1):\ 1+k-1=0 \qquad k=0 \qquad 1\ soluzione$$

$$B\ (2;4):\ 4-2k-1=0 \qquad k=\frac{3}{2} \qquad 2\ soluzioni$$

$$\mathbf{1\ soluzione\ per\ } k\leq 0\ \vee\ k>\frac{3}{2} \qquad \mathbf{2\ soluzioni\ per\ } 0<k\leq\frac{3}{2}$$



3. Scrivi l'equazione del luogo descritto dai centri della circonferenza di equazione:

$$(k+2)\,x^2+(k+2)\,y^2+8x-2\,(1+k)\,y-2\,(k+2)=0$$

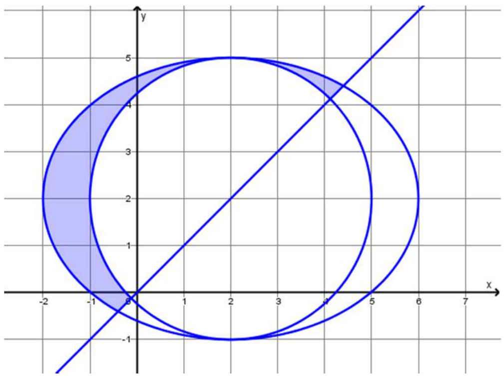
La generica equazione della circonferenza è:

$$x^2+y^2+\frac{8}{k+2}x-\frac{2\,(1+k)}{k+2}y-2=0$$

Il generico centro ha coordinate: $C\left(-\frac{4}{k+2};\frac{1+k}{k+2}\right)$. Perciò il luogo geometrico ha equazione:

$$\begin{cases} x=-\dfrac{4}{k+2} \\ y=\dfrac{1+k}{k+2} \end{cases} \qquad \begin{cases} k+2=-\dfrac{4}{x} \\ y=-\dfrac{x}{4}\,(1+k) \end{cases} \qquad k+2\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R} \qquad \begin{cases} k+1=-\dfrac{4}{x}-1 \\ y=-\dfrac{x}{4}\left(-\dfrac{4}{x}-1\right) \end{cases} \qquad \boldsymbol{y=1+\frac{x}{4}}$$

4. Scrivi un sistema di disequazioni che individui le regioni di piano rappresentate e determinane l'area:



Si tratta di una circonferenza di centro $(2;2)$ e raggio 3 e di una ellisse di centro $(2;2)$ e semiassi 4 e 3. La retta è la bisettrice di primo e terzo quadrante, perciò:

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y-2)^2\geq 9 \\ \dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-2)^2}{9}\leq 1 \\ y\geq x \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x^2+y^2-4x-4y-1\geq 0} \\ \boldsymbol{9x^2+16y^2-36x-64y-44\leq 0} \\ \boldsymbol{y\geq x} \end{cases}$$

L'area colorata è metà della parte di piano compresa tra l'ellisse e la circonferenza: ho la certezza che sia metà, visto che la retta passa per il centro di simmetria delle due coniche. Ricordo inoltre che l'area dell'ellisse si calcola come prodotto tra π e i semiassi, mentre l'area della circonferenza è π per il quadrato del raggio:

$$Area=\frac{1}{2}(12\pi-9\pi)=\boldsymbol{\frac{3}{2}\pi}$$

5. Una circonferenza di equazione $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ viene traslata secondo un vettore $\vec{v}\,(a-1;2a)$. Determina il parametro a in modo che la circonferenza traslata abbia centro sulla bisettrice del primo e terzo quadrante e scrivi l'equazione della circonferenza traslata.

Primo modo:

Determino il centro e il raggio della circonferenza di partenza: $C\,(-2;2)\quad r=2$.

Applico la traslazione al centro della circonferenza:

$$\begin{cases} x'=x+a-1 \\ y'=y+2a \end{cases} \qquad\qquad C'(a-3;2+2a)$$

Perché il centro appartenga alla bisettrice di primo e terzo quadrante, le due coordinate devono essere uguali, perciò:

$$a-3=2+2a \qquad\qquad \boldsymbol{a=-5}$$

La circonferenza traslata avrà centro in $C'(-8;\ -8)$ e raggio 2, come quella di partenza, perciò avrà equazione:

$$(x+8)^2+(y+8)^2=4 \qquad\qquad \boldsymbol{x^2+y^2+16x+16y+124=0}$$

Secondo modo:

Determino le equazioni della traslazione e della sua inversa:

$$\begin{cases} x'=x+a-1 \\ y'=y+2a \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x=x'-a+1 \\ y=y'-2a \end{cases}$$

Applico la traslazione alla circonferenza di partenza:

$$(x-a+1)^2+(y-2a)^2+4\,(x-a+1)-4\,(y-2a)+4=0$$

$$x^2+a^2+1-2ax+2x-2a+y^2+4a^2-4ay+4x-4a+4-4y+8a+4=0$$

$$x^2+y^2+2x\,(3-a)-4y\,(1+a)+5a^2+2a+9=0$$

La circonferenza di arrivo ha centro di coordinate: $C\,(a-3;2+2a)$.

Perché il centro appartenga alla bisettrice di primo e terzo quadrante, le due coordinate devono essere uguali, perciò:

$$a-3=2+2a \qquad\qquad \boldsymbol{a=-5}$$

Sostituendo il valore del parametro nella circonferenza traslata, ottengo:

$$\boldsymbol{x^2+y^2+16x+16y+124=0}$$