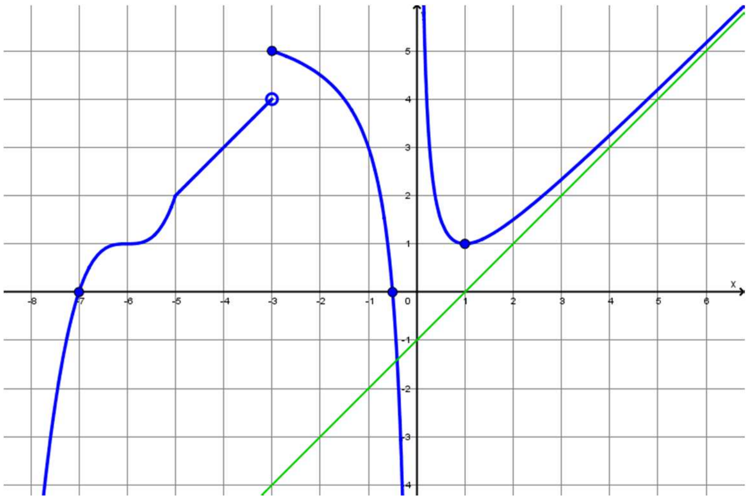
1. Rappresenta graficamente una funzione $y = f(x)$ per la quale siano verificate le seguenti condizioni:

$$D =]-\infty; 0[\cup]0;\ +\infty[\qquad C = \mathbb{R} \qquad f(-3) = 5 \qquad f(1) = 1$$

Intersezioni con gli assi: $A\ (-7; 0),\ B\ \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ $\qquad f(x) > 0$: $\left]-7;\ -\frac{1}{2}\right[\cup]0;\ +\infty[$

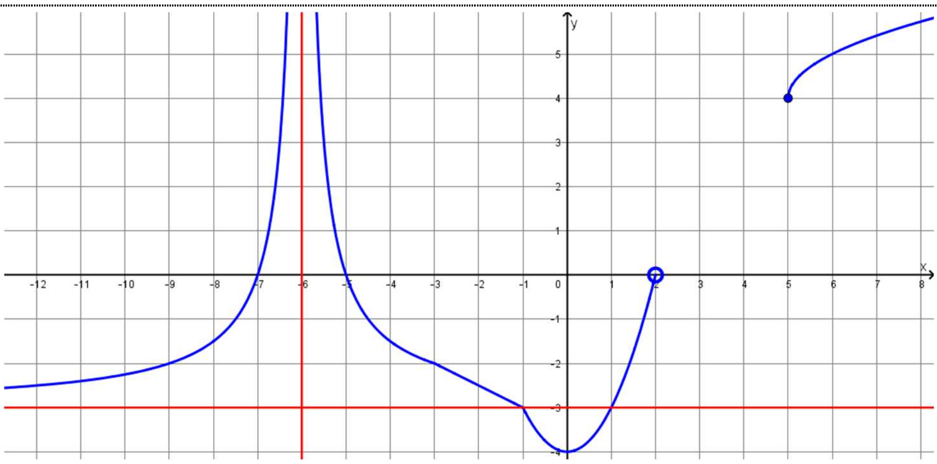
Crescente: $]-\infty;\ -3[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$ $\qquad$ Asintoto obliquo a destra di equazione $y = x - 1$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-3^-} f(x) = 4$$



2. Dall'esame del grafico della funzione rappresentato in figura, deduci:

Dominio: $]-\infty; -6[\cup]-6; 2[\cup [5;\ +\infty[$



Codominio: $[-4; +\infty[$

Intersezioni con gli assi:

$(-7; 0); (-5; 0); (0;\ -4)$

$f(x) > 0$:

$]-7; -6[\cup]-6; -5[\cup [5;\ +\infty[$

Crescente:

$]-\infty; -6[\cup]0; 2[\cup [5; +\infty[$

Iniettiva? **NO**

Suriettiva? **NO**

Limitata? **Inferiormente**

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$ $\qquad \lim_{x\to2^+} f(x) =$ **non esiste**

$\lim_{x\to-6^+} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to5^+} f(x) = 4$

$\lim_{x\to-6^-} f(x) = +\infty$ $\qquad \lim_{x\to0} f(x) = -4$

$\lim_{x\to2^-} f(x) = 0$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3. Traccia il grafico probabile di una delle seguenti funzioni, dopo averne studiato tutte le caratteristiche:

$$f(x)=\frac{x^4+1}{x^3-4x^2-x+4} \qquad\qquad f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$$

$$f(x)=\frac{x^4+1}{x^3-4x^2-x+4}=\frac{x^4+1}{x^2(x-4)-(x-4)}=\frac{x^4+1}{(x-4)(x-1)(x+1)}$$

1. Dominio: $\boldsymbol{D=]-\infty;\ -1[\ \cup\ ]-1;\ 1[\cup\ ]1;\ 4[\cup\ ]4;\ +\infty[}$
2. Eventuali simmetrie: visto il dominio non è **né pari né dispari**
3. Intersezioni con gli assi:

$\begin{cases} y=\frac{x^4+1}{x^3-4x^2-x+4} \\ y=0 \end{cases}$ non ci sono intersezioni con l'asse x $\begin{cases} y=\frac{x^4+1}{x^3-4x^2-x+4} \\ x=0 \end{cases}$ $\boldsymbol{A\left(0;\frac{1}{4}\right)}$

4. Positività:

$$\frac{x^4+1}{x^3-4x^2-x+4}>0 \qquad (x-4)(x-1)(x+1)>0 \qquad \boldsymbol{-1<x<1 \quad \vee \quad x>4}$$

5. Eventuali asintoti:

$$\lim_{x\to-1^{\pm}}\frac{x^4+1}{x^3-4x^2-x+4}=\pm\infty \qquad \boldsymbol{x=-1\ \ asintoto\ verticale}$$

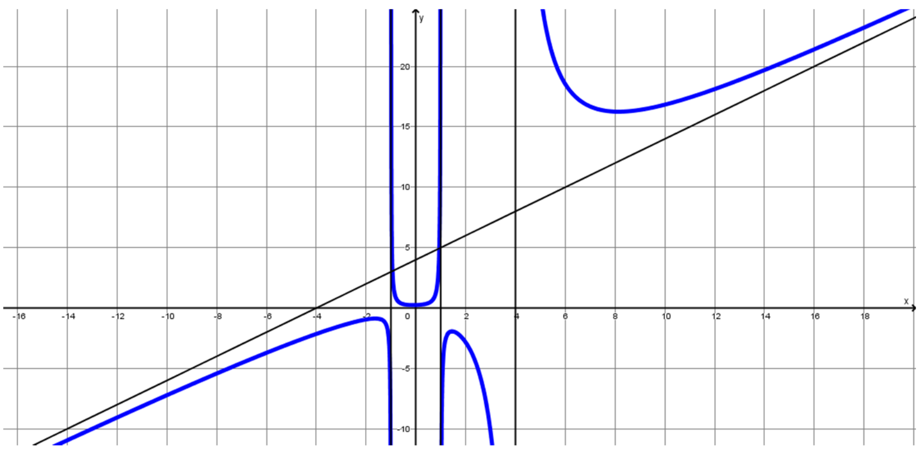
$$\lim_{x\to1^{\pm}}\frac{x^4+1}{x^3-4x^2-x+4}=\mp\infty \qquad \boldsymbol{x=1\ \ asintoto\ verticale}$$

$$\lim_{x\to4^{\pm}}\frac{x^4+1}{x^3-4x^2-x+4}=\pm\infty \qquad \boldsymbol{x=4\ \ asintoto\ verticale}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4+1}{x^3-4x^2-x+4}=\pm\infty \qquad può\ esistere\ asintoto\ obliquo$$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4+1}{x^3-4x^2-x+4}\cdot\frac{1}{x}\right)=1 \qquad q=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^4+1}{x^3-4x^2-x+4}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4+1-x^4+4x^3+x^2-4x}{x^3-4x^2-x+4}=4$$

$$\boldsymbol{y=x+4\ \ asintoto\ obliquo}$$



$$f(x) = \ln\frac{x+1}{x-1}$$

1. Dominio: $\frac{x+1}{x-1} > 0 \qquad x < -1 \quad \vee \quad x > 1 \qquad \boldsymbol{D =]-\infty;\ -1[\ \cup\ ]1;\ +\infty[}$

2. Eventuali simmetrie: $f(-x) = \ln\frac{-x+1}{-x-1} = \ln\frac{x-1}{x+1} = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1} = -\ln\frac{x+1}{x-1} = -f(x) \qquad \boldsymbol{dispari}$

3. Intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} y = \ln\dfrac{x+1}{x-1} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \frac{x+1}{x-1} = 1 \qquad \frac{2}{x-1} = 0 \qquad \nexists x \in \mathbb{R}$$

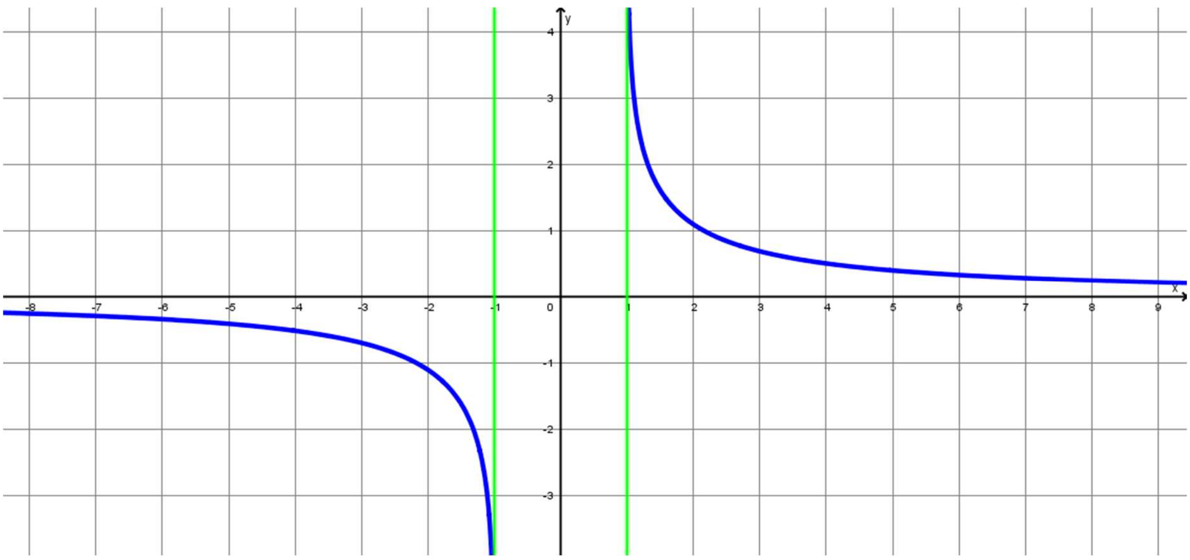
4. Positività:

$$\ln\frac{x+1}{x-1} > 0 \qquad \frac{x+1}{x-1} > 1 \qquad \frac{2}{x-1} > 0 \qquad \boldsymbol{x > 1}$$

5. Eventuali asintoti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \ln\frac{x+1}{x-1} = 0 \qquad \boldsymbol{y = 0 \quad asintoto\ orizzontale}$$

$$\lim_{x\to -1^-} \ln\frac{x+1}{x-1} = -\infty \qquad \boldsymbol{x = -1 \quad asintoto\ verticale} \qquad \lim_{x\to 1^+} \ln\frac{x+1}{x-1} = +\infty \qquad \boldsymbol{x = 1 \quad asintoto\ verticale}$$



4. Calcola i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\log_2(4x^2+1)-\log_2(x^2-1)\right]=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x^2}{x^2}=\log_2 4=\mathbf{2}$$

$$\lim_{x\to1^\pm}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to1^\pm}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right)=\lim_{x\to1^\pm}\frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1^\pm}\frac{1}{x+1}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 2x}{\tan^2 3x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin^2 2x}{(2x)^2}\cdot(2x)^2}{\frac{\tan^2 3x}{(3x)^2}\cdot(3x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{4x^2}{9x^2}=\mathbf{\frac{4}{9}}$$

$$\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{2x}}\right)^{\frac{1}{2x}}\right]^4=\boldsymbol{e^4}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1+\sin x}{1+\sin x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos x\ (1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x}=\mathbf{0}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\left(\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\cdot\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+2x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{3\sin x}{\sin x}+2\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x\right)=3+2=\mathbf{5}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sin^2 x+\cos^2 x-\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sin^2 x}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1+x}{2+x^2}=\lim_{x\to\infty}\cos\frac{x}{x^2}=\mathbf{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-4^x}{1-2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-2^x)(1+2^x)}{1-2^x}=\lim_{x\to+\infty}(1+2^x)=+\infty$$