

1.  $\frac{5^{7x-1}}{25^{x+2}} = 4^{5-5x}$

$$\frac{5^{7x-1}}{5^{2x+4}} = 4^{5-5x}$$

$$5^{7x-1-2x-4} = 4^{5-5x}$$

$$5^{5x-5} = \frac{1}{4^{5-5x}}$$

$$20^{5x-5} = 1$$

$$20^{5x-5} = 20^0$$

$$5x - 5 = 0$$

$$x = 1$$

2.  $4^x - 5 \cdot 2^{x+2} = -64$

$$4^x - 5 \cdot 2^2 \cdot 2^x = -64$$

Pongo:  $2^x = t$

$$t^2 - 20t + 64 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{1} \begin{cases} 4 \\ 16 \end{cases}$$

$$t = 4 \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$$

$$t = 16 \Rightarrow 2^x = 16 \Rightarrow 2^x = 2^4 \Rightarrow x = 4$$

3.  $(2^x - 4)(5^x + 7)(3^x - 9) > 0$

Primo fattore:  $2^x - 4 > 0 \Rightarrow 2^x > 2^2 \Rightarrow x > 2$

Secondo fattore:  $5^x + 7 > 0 \quad \forall x \in R$

Terzo fattore:  $3^x - 9 > 0 \Rightarrow 3^x > 3^2 \Rightarrow x > 2$

Dallo studio dei segni ottengo:  $\forall x \neq 2$

4.  $\frac{2^x - 8}{25 - 5^x} \geq 0$

$$N \geq 0: 2^x - 8 \geq 0 \Rightarrow 2^x \geq 2^3 \Rightarrow x \geq 3$$

$$D > 0: 25 - 5^x > 0 \Rightarrow 5^x < 5^2 \Rightarrow x < 2$$

Dallo studio dei segni ottengo:  $2 < x \leq 3$

5.  $5^{6x} - 4 \cdot 5^{3x+1} \geq 125$

$$5^{6x} - 4 \cdot 5 \cdot 5^{3x} - 125 \geq 0$$

Pongo:  $5^{3x} = t$

$$t^2 - 20t - 125 \geq 0$$

$$t_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 125}}{1} \begin{cases} 25 \\ -5 \end{cases} \quad t \leq -5 \vee t \geq 25$$

$$5^{3x} \leq -5 \vee 5^{3x} \geq 25 \Rightarrow 3x \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$$

$$6. \quad \log_2 (x - 5) + \log_2 (x - 2) = 4 + \log_2 \frac{9}{8}$$

$$c.a.: \begin{cases} x - 5 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 5 \\ x > 2 \end{cases} \quad c.a.: x > 5$$

$$\log_2 (x - 5) + \log_2 (x - 2) = \log_2 16 + \log_2 \frac{9}{8}$$

$$\log_2 (x - 5)(x - 2) = \log_2 16 \cdot \frac{9}{8}$$

$$\log_2 (x^2 - 7x + 10) = \log_2 18$$

$$x^2 - 7x + 10 = 18$$

$$x^2 - 7x - 8 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{2} = \begin{cases} 8 \\ -1 \text{ non acc. per c.a.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 8$$

$$7. \quad \ln^2 (x + 1) - 8 \ln (x + 1) + 15 = 0$$

$$c.a.: x > -1$$

$$\text{Pongo: } \ln (x + 1) = t \quad t^2 - 8t + 15 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 15}}{1} = \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$$

$$t = 5 \quad \Rightarrow \quad \ln (x + 1) = 5 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = e^5 \quad \Rightarrow \quad x = e^5 - 1$$

$$t = 3 \quad \Rightarrow \quad \ln (x + 1) = 3 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = e^3 \quad \Rightarrow \quad x = e^3 - 1$$

$$8. \quad \log_{\frac{1}{2}} (3x - 1) > -2$$

$$c.a.: 3x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{1}{3}$$

$$3x - 1 < 4$$

$$3x < 5$$

$$x < \frac{5}{3}$$

Mettendo a sistema il risultato ottenuto con le c.a. ottengo:

$$\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}$$

$$9. \quad \log(3x - 1) - 2 \log(x - 1) + \log\left(\frac{x}{3} - 2\right) \geq 0$$

$$c.a.: \begin{cases} 3x - 1 > 0 \\ x - 1 > 0 \\ \frac{x}{3} - 2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x > 1 \\ x > 6 \end{cases} \quad c.a.: x > 6$$

$$\log(3x - 1) + \log\left(\frac{x}{3} - 2\right) \geq 2 \log(x - 1)$$

$$\log(3x - 1) \left(\frac{x}{3} - 2\right) \geq \log(x - 1)^2$$

$$x^2 - 6x - \frac{x}{3} + 2 \geq x^2 - 2x + 1$$

$$-\frac{13}{3}x \geq -1 \quad \frac{13}{3}x \leq 1 \quad x \leq \frac{3}{13}$$

Mettendo a sistema il risultato ottenuto con le c.a. ottengo:

*imp.*

$$10. \quad \ln x^3 - \ln x^2 + 7 \ln x - 7 \geq 0$$

$$c.a.: x > 0$$

$$3 \ln x - 2 \ln x + 7 \ln x \geq 7$$

$$8 \ln x \geq 7 \quad \ln x \geq \frac{7}{8}$$

Mettendo a sistema il risultato ottenuto con le c.a. ottengo:

$$x \geq e^{\frac{7}{8}}$$