1. Quale valore si deve dare ad *h* affinché sia uguale a 7 l'area del triangolo di vertici A (2; – 1), B (4; 4), C (1; *h*)?

Ⓐ $\frac{7}{2}; -\frac{21}{2}$ Ⓑ $\frac{1}{2}; \frac{7}{2}$ Ⓒ $-\frac{7}{2}; \frac{21}{2}$ Ⓓ $\frac{1}{4}; -2$

Pongo l'area uguale a 7, nel calcolo della matrice:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} = 7$$

$$\left|2\,(h+1)+5\right| = 14 \quad \Rightarrow \quad \left|2h+7\right| = 14 \quad \Rightarrow \quad 2h+7 = \pm 14 \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{7}{2};\ h_2 = -\frac{21}{2}$$

2. Date le due rette parallele 3 x + 4 y = 0 e 3 x + 4 y – 5 = 0, la loro distanza è:

Ⓐ 5 Ⓑ – 5 Ⓒ – 1 Ⓓ 1

Considero il punto O (0; 0) della retta 3 x + 4 y = 0 e calcolo la sua distanza dalla seconda retta, con la formula della distanza punto/retta:

$$\frac{\left|0+0-5\right|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1$$

3. I vertici ABCD di un quadrilatero hanno coordinate A (0; 0), B (h; 0), C (h + k; l), D (k; l). Allora ABCD è:

Ⓐ un quadrato Ⓑ un rettangolo Ⓒ un parallelogrammo Ⓓ un trapezio

Del quadrilatero so che: $\overline{AB} \cong \overline{CD} = \left|h\right|$ e che la retta passante per A e per B è l'asse x e la retta passante per C e per D è la retta y = l, ovvero una retta parallela all'asse x. In altre parole, il quadrilatero ha due lati opposti paralleli e congruenti, ovvero è un parallelogrammo. Perché sia un rettangolo, dovrei avere k = 0 e perché sia un quadrato dovrei avere h = l.

4. Data la circonferenza 4 x^2 + 4 y^2 = 9, le tangenti parallele alle bisettrici dei quadranti formano una figura che è:

Ⓐ un quadrato Ⓑ un rettangolo Ⓒ un rombo, ma non un quadrato Ⓓ un trapezio

La circonferenza ha centro nell'origine degli assi e quindi è simmetrica rispetto all'origine. Le bisettrici dei quadranti sono fra loro perpendicolari, perciò lo sono anche le rette ad esse parallele. In altre parole, si forma un quadrilatero con i lati opposti paralleli e i lati adiacenti perpendicolari. Può trattarsi di un quadrato o di un rettangolo, ma, grazie alla simmetria della circonferenza, si tratta di un quadrato.

5. L'area della figura del quesito precedente è uguale a:

Ⓐ 36 Ⓑ 18 Ⓒ 9 Ⓓ 16

Il quadrato costruito ha il lato congruente al diametro della circonferenza. Scritta in forma normale l'equazione della circonferenza è:

$x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ che in forma generica equivale a: $x^2 + y^2 = r^2$, perciò: $r = \frac{3}{2}$

Il diametro della circonferenza, come il lato del quadrato, vale quindi 3. L'area del quadrato è data dal quadrato del lato, perciò l'area vale 9.

6. L'equazione $x^2 + y^2 - 2x + 4y + k - 3 = 0$ rappresenta un fascio di circonferenze:

Ⓐ $\forall k \in R$ Ⓑ per $k < 3$ Ⓒ per $k \leq 8$ Ⓓ per $k \geq 8$

Perché si tratti dell'equazione di una circonferenza, deve valere la seguente relazione sui coefficienti: $\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c \geq 0$.

Sostituendo: $1 + 4 - k + 3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad k \leq 8$

7. L'equazione $x^2 + y^2 - 2x(k+1) + y(k-1) = 0$ rappresenta un fascio di circonferenze:

Ⓐ concentriche Ⓑ secanti Ⓒ tangenti Ⓓ esterne

Determino due circonferenze generiche, dando a k due valori qualsiasi:

$k = -1: \quad x^2 + y^2 - 2y = 0 \qquad\qquad k = 1: \quad x^2 + y^2 - 4x = 0$

Metto a sistema le due equazioni: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases}$ $\overline{4x - 2y = 0}$ $\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow 5x^2 - 4x = 0$

La risolvente del sistema è un'equazione spuria, perciò ha $\Delta > 0$, ovvero due soluzioni distinte. Le circonferenze sono secanti.

8. La circonferenza del fascio $x^2 + y^2 - 2x + 4y + k - 3 = 0$ che passa per (1; 1) si ottiene per:

Ⓐ $k = -1$ Ⓑ $k = 2$ Ⓒ $k = 3$ Ⓓ $k = 4$

Sostituisco le coordinate del punto nell'equazione del fascio, perché se un punto appartiene a un luogo geometrico, le sue coordinate soddisfano l'equazione del luogo:

$$1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + k - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad k + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -1$$

9. La circonferenza del fascio $x^2 + y^2 - 2x(k+1) + 2y(k-1) = 0$ che ha raggio 2 si ottiene per:

Ⓐ $k = \pm 1$ Ⓑ $k = 0$ Ⓒ $k = 1$ Ⓓ impossibile

Calcolo il generico raggio e lo pongo uguale a 2: $\sqrt{(k+1)^2 + (k-1)^2} = 2$

$$k^2 + 2k + 1 + k^2 - 2k + 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad 2k^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad k = \pm 1$$

10. La circonferenza del fascio $x^2 + y^2 - 2x + 4y + k - 3 = 0$ tangente nell'origine alla retta x – 2 y = 0 si ottiene per:

Ⓐ $k = 13$ Ⓑ $k = 3$ Ⓒ $k = 7$ Ⓓ nessuno dei precedenti

Siccome la retta è tangente nell'origine alla circonferenza, basta imporre il passaggio di una circonferenza del fascio per l'origine, ovvero porre il termine noto uguale a zero: $k - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 3$

11. La parabola $y = ax^2 + 4ax$ è simmetrica rispetto:

Ⓐ all'asse y Ⓑ alla retta x = – 2a Ⓒ alla retta x = – 2 Ⓓ alla retta x = 1/2a

La parabola ha l'asse parallelo all'asse y. Determino l'equazione dell'asse secondo la formula generica: $x = -\dfrac{b}{2a}$

Sostituendo i coefficienti dell'equazione data, ottengo: $x = -\dfrac{4a}{2a} = -2$

12. Quale valore deve assumere k affinché la retta: $(k-1)x + 2ky - k + 2 = 0$ intersechi la parabola $x = -3y^2 - y + 1$ in un solo punto?

Ⓐ 1 Ⓑ 0 Ⓒ -1 Ⓓ 2

La parabola ha asse di simmetria parallelo all'asse x. Perché la intersechi in un solo punto, la retta del fascio deve essere parallela all'asse x, ovvero avere il coefficiente della x nullo: $k - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 1$

13. L'equazione $y = (x - a)^2$ rappresenta una parabola:

Ⓐ tangente all'asse y Ⓑ che ha vertice in (a; 0) Ⓒ che interseca l'asse x in due punti, di cui uno di ascissa a Ⓓ non interseca l'asse x

L'equazione della parabola ha $\Delta = 0$ (lo deduco senza svolgere i calcoli, in quanto il termine a secondo membro è un quadrato di binomio) perciò il vertice si trova sull'asse x e questo esclude la terza e la quarta risposta. Per essere tangente all'asse y la parabola dovrebbe avere l'asse di simmetria parallelo all'asse x e non è questo caso. Perciò non resta che dire che la parabola ha vertice nel punto (a; 0)

14. L'equazione $(k - 2)\,x^2 + (3k - 2)\,y^2 + 2x + y + k - 3 = 0$ rappresenta una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x se:

Ⓐ $k = 2$ Ⓑ $k = 2/3$ Ⓒ $k = 3$ Ⓓ nessuno dei precedenti

L'equazione generica di una parabola con asse parallelo all'asse x è: $x = a\,y^2 + b\,y + c$, ovvero l'equazione data deve avere il coefficiente di x^2 nullo, cioè: $k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 2$

15. La generica equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y, con vertice sul semiasse positivo delle y e con concavità verso l'alto ha:

Ⓐ $a > 0,\ b = 0,\ c < 0$ Ⓑ $a > 0,\ c < 0$ Ⓒ $b = 0,\ a\,e\,c\ concordi$ Ⓓ $b^2 - 4ac < 0,\ a < 0$

La generica equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y è: $y = a\,x^2 + b\,x + c$.
Se il vertice si trova sull'asse y, allora $b = 0$ e il vertice ha coordinate (c; 0), perciò, essendo il vertice sul semiasse positivo delle y, $c > 0$.
Siccome la concavità è rivolta verso l'alto $a > 0$.

16. Una parabola di equazione $y = a\,x^2 + b\,x + c$ che è secante all'asse x ha sicuramente:

Ⓐ $b^2 - 4ac > 0,\ a < 0$ Ⓑ $b^2 - 4ac > 0,\ a > 0$ Ⓒ $b^2 - 4ac > 0$ Ⓓ nessuno dei precedenti

Mettendo a sistema l'equazione della parabola con quella dell'asse x, ottengo la risolvente: $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ che ha due soluzioni reali e distinte se e solo se $\Delta > 0$.