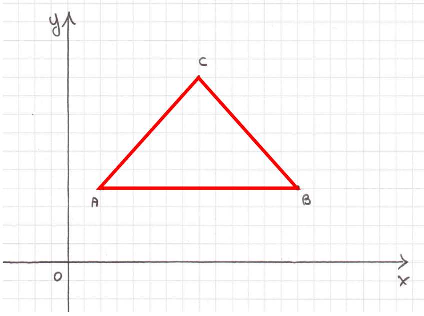
RETTA/PIANO CARTESIANO

1. Dopo aver verificato che il triangolo di vertici A (1; 2), B (7; 2) e C (4; 5) è rettangolo isoscele, trova le coordinate dell'ortocentro (punto di incontro delle altezze). Rappresenta la situazione sul piano cartesiano.



Determino innanzi tutto le lunghezze dei lati del triangolo:

$$AB = |x_A - x_B| = |1 - 7| = 6$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

Il triangolo è perciò isoscele sulla base AB (come si intuisce anche dal disegno).

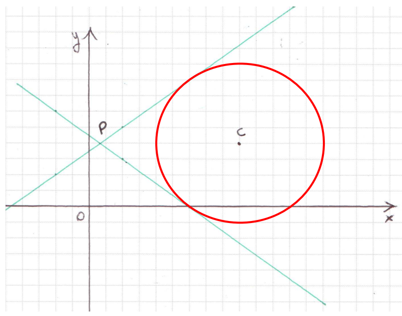
Con il teorema di Pitagora, verifico se si tratta di un triangolo rettangolo. Deve essere verificata la relazione:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 \quad \Rightarrow \quad 6^2 = (3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 \quad \Rightarrow \quad 36 = 36 \quad c.v.d.$$

Trattandosi di un triangolo rettangolo, l'ortocentro coincide con il vertice dell'angolo retto, ovvero con C, perciò l'ortocentro ha coordinate: $C\ (4; 5)$

CIRCONFERENZA

2. Conduci dal punto $P\left(\frac{2}{3}; 4\right)$ le tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 18x - 8y + 72 = 0$. Rappresenta la situazione sul piano cartesiano.



Verifico innanzi tutto che il punto P è esterno alla circonferenza (come si può notare dal disegno) sostituendo le sue coordinate nell'equazione della circonferenza:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4^2 - 18 \cdot \frac{2}{3} - 8 \cdot 4 + 72 = \frac{4}{9} + 16 - 12 - 32 + 72 > 0$$

Considero il fascio di rette con centro in P: $y - 4 = m\left(x - \frac{2}{3}\right)$.

Dato il centro C (9; 4) della circonferenza e il raggio $r = \sqrt{9^2 + 4^2 - 72} = 5$, pongo la distanza del centro dalla generica retta uguale al raggio:

$$\frac{\left|9m - 4 - \frac{2}{3}m + 4\right|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 5 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{25}{3}m\right| = 5\sqrt{m^2 + 1} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{5}{3}m\right| = \sqrt{m^2 + 1}$$

Elevando a quadrato entrambi i membri, ottengo i due valori di *m* che, sostituiti nell'equazione del fascio, mi danno le equazioni delle due rette tangenti:

$$\frac{25}{9}m^2 = m^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{16}{9}m^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad m = \pm\frac{3}{4}$$

$$t_1: y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{2} \qquad\qquad t_2: y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$$

3. La retta di equazione $x + y + 4 = 0$ interseca la circonferenza $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$ nei punti A e B. Calcola la misura della corda $\overline{AB}$.

Determino le intersezioni tra la retta e la circonferenza mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0 \\ x + y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y - 4 \\ y^2 + 16 + 8y + y^2 - 6y - 24 - 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y - 4 \\ y^2 - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y - 4 \\ y_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} \right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 2 \end{cases} ; \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$$

I due punti sono $A(-6; 2)$ e $B(-3; -1)$.

Calcolo la lunghezza del segmento $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-6+3)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \boxed{3\sqrt{2}}$$

PARABOLA

4. Determina i coefficienti a, b, c nell'equazione della parabola y = ax² + bx + c, sapendo che essa passa per i punti A (1; – 2), B (2; 2) e che ha come asse di simmetria la retta $x = 3$.

Per determinare l'equazione della parabola, impongo il passaggio della parabola per i punti A e B sostituendo le coordinate dei punti nella generica equazione; come terza condizione sfrutto l'equazione dell'asse di simmetria, che ha generica equazione $x = -\dfrac{b}{2a}$ e pongo la sua generica equazione uguale a quella data. Ottengo così il sistema:

$$\begin{cases} -2 = a + b + c \\ 2 = 4a + 2b + c \\ -\dfrac{b}{2a} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -6a \\ -2 = a - 6a + c \\ 2 = 4a + 2b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -6a \\ c = 5a - 2 \\ 2 = 4a - 12a + 5a - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{4}{3} \\ b = 8 \\ c = -\dfrac{26}{3} \end{cases}$$

L'equazione della parabola è quindi: $\boxed{y = -\dfrac{4}{3}x^2 + 8x - \dfrac{26}{3}}$

5. Data la parabola di equazione $y = -\frac{4}{3}x^2 + 8x - \frac{26}{3}$, determina:

   a. l'equazione della retta tangente alla parabola nel suo punto di ascissa – 1;
   b. la lunghezza del segmento AB, essendo A e B i punti di intersezione della parabola con la retta 4 x – 3 y – 10 = 0;
   c. rappresenta la parabola e la retta che la interseca nei punti A e B.

a. Determino le coordinate del punto di ascissa – 1 della parabola e poi applico la regola dello sdoppiamento per determinare l'equazione della retta tangente alla parabola:

$$y = -\frac{4}{3}(-1)^2 + 8\cdot(-1) - \frac{26}{3} = -\frac{4}{3} - 8 - \frac{26}{3} = -18 \qquad \Rightarrow \qquad P\,(-1; -18)$$

Applicando la regola dello sdoppiamento: $\frac{y + y_0}{2} = a\ x\ x_0 + b\ \frac{x + x_0}{2} + c$

ottengo: $\frac{y - 18}{2} = -\frac{4}{3}\ x\cdot(-1) + 8\ \frac{x - 1}{2} - \frac{26}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{32x - 3y - 22 = 0}$

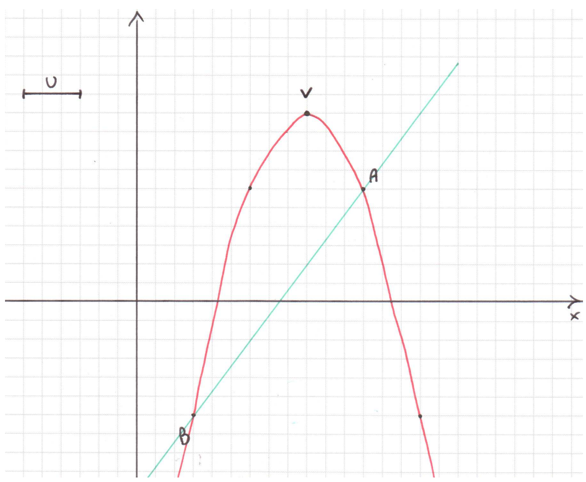
b. Determino le coordinate dei punti di intersezione tra retta e parabola, mettendo a sistema le due equazioni date:

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x^2 + 8x - \frac{26}{3} \\ 4x - 3y - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{4}{3}x^2 + 8x - \frac{26}{3} \\ y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}x - \frac{10}{3} = -\frac{4}{3}x^2 + 8x - \frac{26}{3} \\ y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right. \\ y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases};\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$$

I due punti sono $A\,(4; 2)$ e $B\,(1; -2)$. Calcolo la lunghezza del segmento $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \boxed{5}$$



6. Determina l'equazione del fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, passanti per i punti A (– 1; 1) e B (1; – 1). Trova poi la parabola del fascio che ha il vertice di coordinate $V\left(\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}\right)$.

Determino innanzi tutto l'equazione del fascio di parabole secanti, di generica equazione

$$y = mx + 1 + k\,(x - x_A)\,(x - x_B)$$

dove $y = mx + q$ è la generica retta passante per A e B:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+1}{1+1} = \frac{y-1}{-1-1} \quad \Rightarrow \quad x + y = 0$$

Perciò l'equazione del fascio diventa: $y = -x + k\,(x+1)\,(x-1) \quad \Rightarrow \quad y = k\,x^2 - x - k$

Sostituendo nell'equazione le coordinate del vertice ottengo la parabola richiesta:

$$-\frac{5}{4} = k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - k \quad \Rightarrow \quad -5 = k - 2 - 4k \quad \Rightarrow \quad 3k = 3 \quad \Rightarrow \quad k = 1$$

E quindi, sostituendo il valore di k così ottenuto, la parabola ha equazione: $y = x^2 - x - 1$