1. Rappresenta graficamente le curve rappresentate dalle seguenti equazioni:

   a. $x^2 + y^2 - 2|x| - 2|y| = 0$

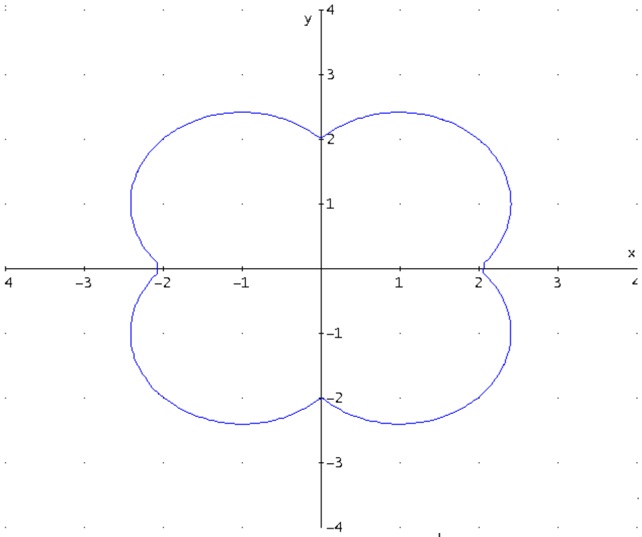
   Si possono verificare quattro diversi casi:

   $\begin{cases} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$ circonferenza nel primo quadrante, di centro $C\ (1;\ 1)$ e passante per l'origine

   $\begin{cases} x < 0;\ y \geq 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0 \end{cases}$ circonferenza nel secondo quadrante, di centro $C\ (-1;\ 1)$ e passante per l'origine

   $\begin{cases} x < 0;\ y < 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0 \end{cases}$ circonferenza nel terzo quadrante, di centro $C\ (-1;\ -1)$ e passante per l'origine

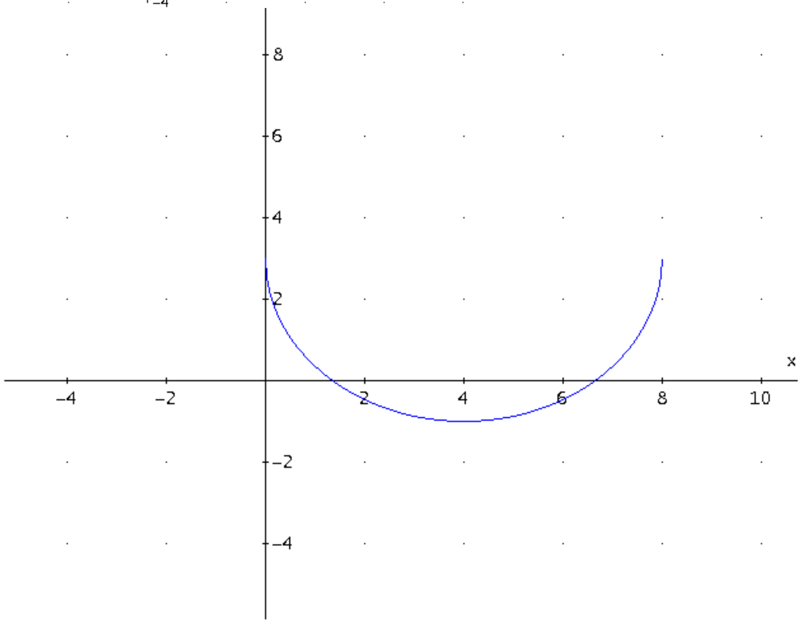
   $\begin{cases} x \geq 0;\ y < 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \end{cases}$ circonferenza nel quarto quadrante, di centro $C\ (1;\ -1)$ e passante per l'origine



   b. $y = 3 - \sqrt{8x - x^2}$

   $c.e.: 0 \leq x \leq 8$

   $\begin{cases} y \leq 3 \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y + 9 = 0 \end{cases}$

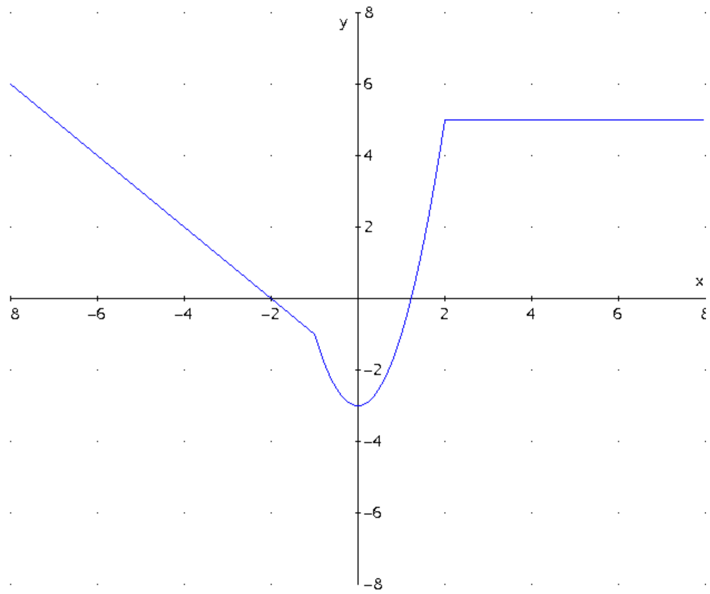


c. $$y = \begin{cases} -x-2 & per\ x \le -1 \\ 2x^2-3 & per\ -1 < x \le 2 \\ 5 & per\ x > 2 \end{cases}$$

$y = -x-2$ è una retta obliqua che ha in comune con la parabola il punto $(-1; -1)$

$y = 2x^2 - 3$ è una parabola con asse parallelo all'asse y e vertice $V\ (0; -3)$

$y = 5$ è una retta parallela all'asse x



2. Trova l'equazione corrispondente al seguente grafico, utilizzando i dati della figura:

Nella prima parte di grafico, per $x < -3$, abbiamo una retta obliqua, passante per i punti $(-3; 1)$ e $(-6; 0)$. Determiniamo l'equazione, con la formula della retta passante per due punti:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \Rightarrow \frac{x+6}{-3+6} = \frac{y-0}{1-0} \Rightarrow y = \frac{x}{3} + 2$$

Nella parte di grafico per $-3 \le x \le 0$, c'è un arco di circonferenza, di centro $(0; 1)$ e raggio 3:

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = 3^2 \Rightarrow (y-1)^2 = 3^2 - x^2 \Rightarrow y - 1 = \sqrt{9 - x^2}$$

Nell'ultima parte del grafico, per $x > 0$, c'è una parabola con asse parallelo all'asse y e vertice nell'origine degli assi cartesiani. La sua equazione generica è $y = ax^2 + bx + c$. Sapendo che la parabola passa per il punto $(0; 4)$ e ha vertice in $(3; 0)$ (come si evince dal grafico), sostituendo le coordinate del punto nell'equazione generica, ottengo $y = \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 4$.

L'equazione della funzione rappresentata è quindi:

$$y = \begin{cases} \frac{1}{3}x + 2 & per\ x < -3 \\ 1 + \sqrt{9 - x^2} & per\ -3 \le x \le 0 \\ \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{3}x + 4 & per\ x > 0 \end{cases}$$

3. Risolvi graficamente la seguente disequazione irrazionale: $\sqrt{8-x}-4 \geq \frac{1}{4}x-3$.

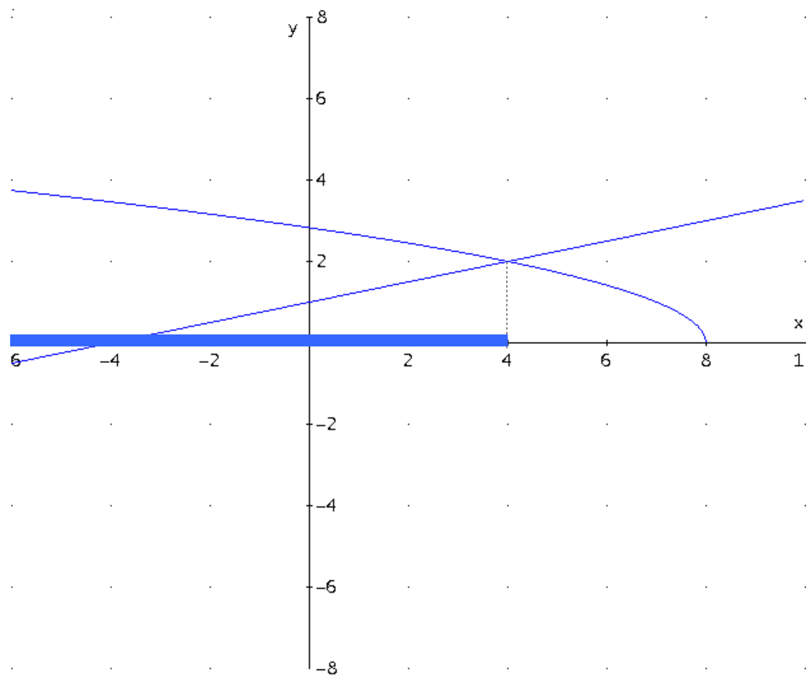
$$\sqrt{8-x} \geq \frac{1}{4}x+1$$

Rappresento le funzioni:

$y=\sqrt{8-x} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y \geq 0 \\ x=-y^2+8 \end{cases}$ parabola con asse parallelo all'asse x e vertice $V\ (8;\ 0)$

$y=\frac{1}{4}x+1$ retta obliqua

Le due funzioni si incontrano nel punto di coordinate $(4;\ 2)$



$$x \leq 4$$

4. Studia il seguente sistema parametrico con metodo grafico: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0 \\ x(k+1) - 2y + 2k + 6 = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Rappresento la circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$$

$$C(5;3) \quad r = 5$$

Determino i due punti limite, sostituendo l'ordinata 0:

$$A(1;0) \qquad B(9;0)$$

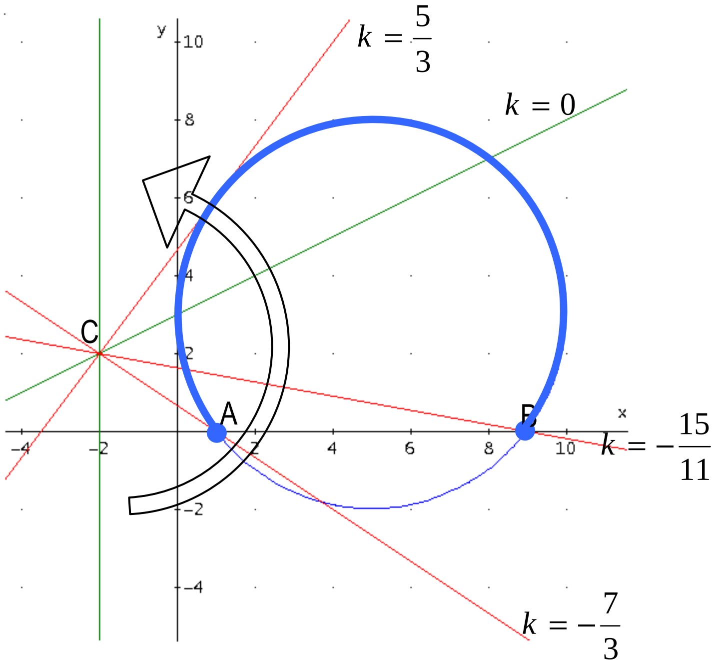
Determino le equazioni delle due rette generatrici del fascio proprio. Dalla loro intersezione, determino le coordinate del centro del fascio:

$$x(k+1) - 2y + 2k + 6 = 0$$

$$k(x+2) + x - 2y + 6 = 0$$

Le due rette generatrici sono: $y = \frac{1}{2}x + 3$ ottenuta per $k = 0$, e $x = -2$. Il centro ha coordinate: $C(-2;2)$.

Impongo il passaggio del fascio per il punto A, sostituendo le coordinate di A nell'equazione del fascio:



$$k + 1 + 2k + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{7}{3}$$

In questo caso ho una soluzione limite (accettabile). In altre parole, una soluzione.

Impongo il passaggio del fascio per il punto B, sostituendo le coordinate di B nell'equazione del fascio:

$$9k + 9 + 2k + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{15}{11}$$

In questo caso ho una soluzione limite (accettabile) e una soluzione ordinaria. In altre parole, due soluzioni.

Determino la retta del fascio tangente alla circonferenza, ponendo la distanza del centro dal fascio di rette uguale al raggio:

$$\frac{|5(k+1) - 6 + 2k + 6|}{\sqrt{(k+1)^2 + 4}} = 5 \qquad |7k + 5| = 5\sqrt{k^2 + 2k + 5}$$

Elevo entrambi i membri al quadrato per risolvere l'equazione:

$$49k^2 + 25 + 70k = 25k^2 + 50k + 125 \qquad 24k^2 + 20k - 100 = 0$$

$$6k^2 + 5k - 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 600}}{12} = \begin{cases} \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Il valore accettabile in questo caso è 5/3, vista la variazione del fascio in dipendenza del valore k.

Concludendo: $1\ sol.\ per\ -\frac{7}{3} \leq k < -\frac{15}{11} \qquad 2\ sol.\ per\ -\frac{15}{11} \leq k \leq \frac{5}{3}$