1. Data l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 25$, determina le equazioni delle tangenti nei punti P (3, 2) e Q (0, 4).

Verifico innanzi tutto se i due punti appartengono all'ellisse, sostituendo le loro coordinate nell'equazione dell'ellisse:

$$P \in \mathscr{E} \qquad \text{infatti} \qquad 3^2 + 4 \cdot 2^2 = 25$$

$$Q \notin \mathscr{E} \qquad \text{infatti} \qquad 0^2 + 4 \cdot 4^2 \neq 25$$

Per determinare l'equazione della tangente all'ellisse in P è sufficiente applicare la formula dello sdoppiamento:

$$3x + 4 \cdot 2y = 25 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{3x + 8y = 25}}$$

Per determinare l'equazione della tangente all'ellisse in Q, essendo Q un punto esterno, determino l'equazione del fascio di rette centrato in Q, metto a sistema l'equazione con quella dell'ellisse e pongo Δ = 0 nell'equazione risolvente:

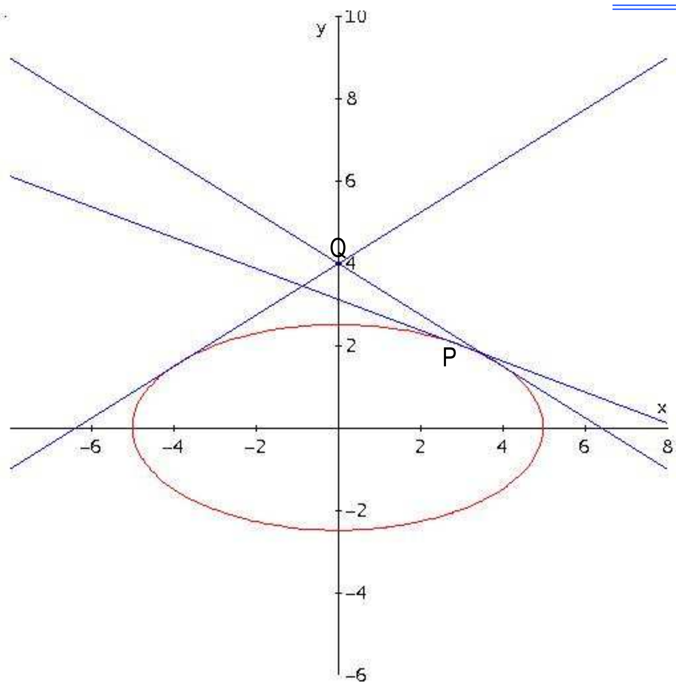
$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 25 \\ y - 4 = m(x - 0) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 25 \\ y = mx + 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 + 4(mx + 4)^2 = 25$$

$$x^2 + 4m^2x^2 + 64 + 32mx - 25 = 0 \qquad\qquad x^2(1 + 4m^2) + 32mx + 39 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 256m^2 - 39(1 + 4m^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 256m^2 - 39 - 156m^2 = 0$$

$$100m^2 = 39 \quad \Rightarrow \quad m = \pm\frac{\sqrt{39}}{10}$$

Ovvero, le equazioni delle due tangenti uscenti da Q sono: $$\underline{\underline{y = \pm\frac{\sqrt{39}}{10}x + 4}}$$



2. Determina l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x passante per i punti A (3; 1) e B (5; 3) e rappresentala.

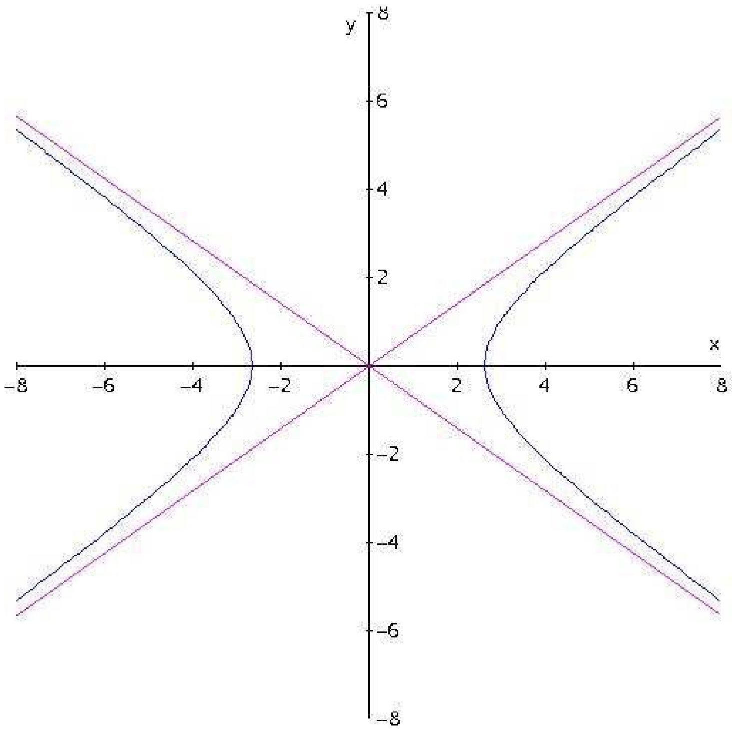
La generica equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x è: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, che posso anche scrivere nella forma semplificata:

$A x^2 - B y^2 = 1$, avendo posto: $A=\frac{1}{a^2}$ e $B=\frac{1}{b^2}$

Sostituisco le coordinate nei punti nell'equazione semplificata e risolvo il sistema con il metodo dell'eliminazione, sottraendo la prima equazione dalla seconda:

$$\begin{cases} 9A - B = 1 \\ 25A - 9B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16A - 8B = 0 \\ 9A - B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 2A \\ 9A - 2A = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{7} \\ B = \frac{2}{7} \end{cases}$$

Perciò l'equazione dell'iperbole è: $x^2 - 2y^2 = 7$



3. Verifica che la retta $5x + 16y + 8 = 0$ stacchi sull'iperbole $y = \dfrac{2x+3}{x-6}$ una corda $\overline{AB}$ di lunghezza $\dfrac{\sqrt{281}}{8}$.
Determina inoltre l'area del triangolo AOB.

Determino innanzi tutto le coordinate dei punti di intersezione tra l'iperbole e la retta, mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x+3}{x-6} \\ y = -\dfrac{5}{16}x - \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x+3}{x-6} = -\dfrac{5}{16}x - \dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{5}{16}x - \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16(2x+3) = -5x(x-6) - 8(x-6) \\ y = -\dfrac{5}{16}x - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$32x + 48 = -5x^2 + 30x - 8x + 48 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 + 10x = 0 \quad \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{array} \right.$$

$$A\begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{5}{16} \cdot 0 - \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A\left(0; -\dfrac{1}{2}\right) \qquad B\begin{cases} x = -2 \\ y = -\dfrac{5}{16} \cdot (-2) - \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow B\left(-2; \dfrac{1}{8}\right)$$

Determino la lunghezza del segmento $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(0+2)^2 + \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{4 + \dfrac{25}{64}} = \dfrac{\sqrt{256+25}}{8} = \dfrac{\sqrt{281}}{8}$$

c.v.d.

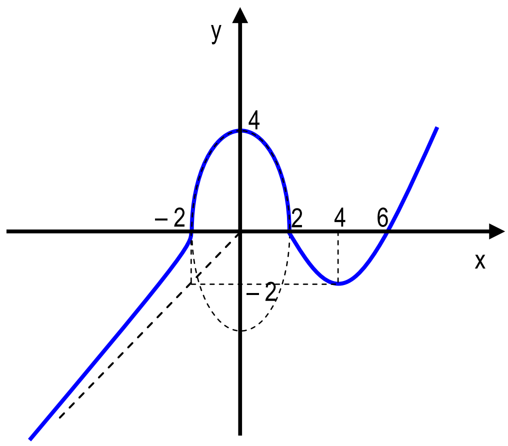
Calcolo l'area del triangolo AOB, considerando AO come base: $\overline{AO} = \dfrac{1}{2}$

E l'altezza BH è la distanza di B dall'asse y (cui appartiene la base AO), che corrisponde al valore assoluto dell'ascissa di B:
$\overline{BH} = 2$

Perciò l'area:

$$A = \dfrac{\overline{AO} \cdot \overline{BH}}{2} = \dfrac{1}{2}$$

4. Trova l'equazione corrispondente al seguente grafico, utilizzando i dati della figura:



Considero innanzi tutto il ramo di iperbole che ha per asintoto la bisettrice di primo e terzo quadrante. Avendo vertice nel punto $(-2;\ 0)$, ha equazione:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1 \qquad \text{ovvero:} \qquad x^2 - y^2 = 4$$

Scritta esplicitando la y diventa:

$$y^2 = x^2 - 4 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = -\sqrt{x^2 - 4} \quad per \;\; x < -2}}$$

La seconda figura è la metà superiore dell'ellisse, con vertici B (0, 4) e A (2, 0).
La sua equazione è:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1 \qquad \text{ovvero:} \qquad 4x^2 + y^2 = 16$$

Scritta esplicitando la y diventa:

$$y^2 = 16 - 4x^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = \sqrt{16 - 4x^2} \quad per \;\; -2 \le x \le 2}}$$

L'ultima figura è una parabola di vertice (4; – 2) e passante per il punto A (2, 0), di generica equazione y = a x^2 + b x + c. Possiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 4 \\ -2 = 16a + 4b + c \\ 0 = 4a + 2b + c \end{cases}$$

Esplicitando la prima equazione in funzione di b e sottraendo dalla seconda equazione la terza, otteniamo:

$$\begin{cases} b = -8a \\ 12a + 2b = -2 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -8a \\ b = -1 - 6a \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8a = -1 - 6a \\ b = -8a \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -4 \\ 2 - 8 + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -4 \\ c = 6 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 \quad per \;\; x > 2}}$$

Concludendo:

$$\underline{\underline{y = \begin{cases} -\sqrt{x^2 - 4} & per \;\; x < -2 \\ \sqrt{16 - 4x^2} & per \;\; -2 \le x \le 2 \\ \dfrac{1}{2}x^2 - 4x + 6 & per \;\; x > 2 \end{cases}}}$$