1. $\sqrt[8]{5^{7x}} = 25^{x+1}$ $\quad 5^{\frac{7x}{8}} = (5^2)^{x+1}$ $\quad 5^{\frac{7x}{8}} = 5^{2x+2}$

$\frac{7}{8}x = 2x + 2$ $\quad 7x - 16x = 16$ $\quad \underline{\underline{x = -\frac{16}{9}}}$

2. $(3^{-5+x})^{1-x} > 27$ $\quad 3^{(-5+x)(1-x)} > 3^3$ $\quad (-5+x)(1-x) > 3$

$-5 + 5x + x - x^2 - 3 > 0$ $\quad x^2 - 6x + 8 < 0$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{1} \left\langle \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right.$ $\quad \underline{\underline{2 < x < 4}}$

3. $25^x - 6 \cdot 5^x = -5$ $\quad (5^2)^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$ $\quad$ Pongo: $5^x = t$

$t^2 - 6t + 5 = 0$ $\quad t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-5}}{1} \left\langle \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} \right.$

$t_1 = 5 \quad \Rightarrow \quad 5^x = 5 \quad \Rightarrow \quad 5^x = 5^1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = 1}}$

$t_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 5^x = 1 \quad \Rightarrow \quad 5^x = 5^0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_2 = 0}}$

4. $2 \ln x - \ln(3x - 2) \geq 0$

Procedo con le condizioni di esistenza, ponendo gli argomenti dei due logaritmi maggiori di zero:

$\begin{cases} x > 0 \\ 3x - 2 > 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{2}{3} \end{cases}$ $\quad x > \frac{2}{3}$

$2 \ln x \geq \ln(3x - 2)$ $\quad \ln x^2 \geq \ln(3x - 2)$ $\quad x^2 \geq 3x - 2$

$x^2 - 3x + 2 \geq 0$ $\quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \left\langle \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right.$ $\quad x \leq 1 \ \vee \ x \geq 2$

Mettendo a sistema con le condizioni di esistenza: $\begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x \leq 1 \ \vee \ x \geq 2 \end{cases}$ $\quad \underline{\underline{\frac{2}{3} < x \leq 1 \ \vee \ x \geq 2}}$

5. $\frac{1}{2}\log_2(x^2-4)=\frac{1}{2}+2$ $\qquad \frac{1}{2}\log_2(x^2-4)=\frac{5}{2}$ $\qquad \log_2(x^2-4)=5$

$\log_2(x^2-4)=5\log_2 2$ $\qquad \log_2(x^2-4)=\log_2 2^5$ $\qquad \log_2(x^2-4)=\log_2 32$

$x^2-4=32$ $\qquad x^2=36$ $\qquad \underline{\underline{x=\pm 6}}$ entrambe accettabili

6. $\left(\frac{3}{7}\right)^{x+1}=\left(\frac{7}{3}\right)^{x+3}$ $\qquad \left(\frac{3}{7}\right)^{x+1}=\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}\right)^{x+3}$ $\qquad \left(\frac{3}{7}\right)^{x+1}=\left(\frac{3}{7}\right)^{-x-3}$

$x+1=-x-3$ $\qquad 2x=-4$ $\qquad \underline{\underline{x=-2}}$

7. $5^{x^2+6x+9}>1$ $\qquad 5^{x^2+6x+9}>5^0$ $\qquad x^2+6x+9>0$

$(x+3)^2>0$ $\qquad \underline{\underline{\forall x\neq -3}}$

8. $\frac{3^{x+1}\cdot 2^{2x+3}}{3^{-x-2}}\le 1$ $\qquad 3^{x+1+x+2}\cdot 2^{2x+3}\le 1$ $\qquad 3^{2x+3}\cdot 2^{2x+3}\le 1$

$6^{2x+3}\le 6^0$ $\qquad 2x+3\le 0$ $\qquad \underline{\underline{x\le -\frac{3}{2}}}$

9. Verifica le seguenti uguaglianze:

a. $\log_a b = 2\log_{a^2} b$ $\qquad \log_a b=\frac{\log_{a^2} b}{\log_{a^2} a}=\frac{\log_{a^2} b}{\frac{1}{2}}=2\log_{a^2} b$

b. $\log_a b=\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b}$ $\qquad \log_a b=\frac{\log_{\sqrt{a}} b}{\log_{\sqrt{a}} a}=\frac{\log_{\sqrt{a}} b}{2}=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{a}} b=\log_{\sqrt{a}} b^{\frac{1}{2}}=\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b}$

c. $\log_a b=\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{b}$ $\qquad \log_a b=\frac{\log_{\frac{1}{a}} b}{\log_{\frac{1}{a}} a}=\frac{\log_{\frac{1}{a}} b}{-1}=-\log_{\frac{1}{a}} b=\log_{\frac{1}{a}} b^{-1}=\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{b}$

10. Rappresenta la seguente funzione: $y = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & x \leq 0 \\ \sqrt{1 - x^2 + 2x} & 0 < x < 2 \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{3} & x \geq 2 \end{cases}$

La prima è una funzione esponenziale decrescente, avendo la base minore di 1.

La seconda è la circonferenza di centro (1; 0) e raggio $\sqrt{2}$, rappresentata solo nella sua parte superiore e tale che 0 < x < 2.

La terza è una retta.