1. $\sqrt[7]{3^{2x}} = 27^{x+2}$ $\quad 3^{\frac{2x}{7}} = (3^3)^{x+2}$ $\quad 3^{\frac{2x}{7}} = 3^{3x+6}$

$\frac{2}{7}x = 3x + 6$ $\quad 2x - 21x = 42$ $\quad \underline{\underline{x = -\frac{42}{19}}}$

2. $(2^{1-x})^{x-5} > 8$ $\quad 2^{(1-x)(x-5)} > 2^3$ $\quad (1-x)(x-5) > 3$

$-5 + 5x + x - x^2 - 3 > 0$ $\quad x^2 - 6x + 8 < 0$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{1} \left\langle \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right.$ $\quad \underline{\underline{2 < x < 4}}$

3. $16^x - 5 \cdot 4^x = -4$ $\quad (4^2)^x - 5 \cdot 4^x + 4 = 0$ $\quad$ Pongo: $4^x = t$

$t^2 - 5t + 4 = 0$ $\quad t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \left\langle \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right.$

$t_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad 4^x = 4 \quad \Rightarrow \quad 4^x = 4^1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_1 = 1}}$

$t_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 4^x = 1 \quad \Rightarrow \quad 4^x = 4^0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x_2 = 0}}$

4. $2\ln x - \ln(4x-3) \geq 0$

Procedo con le condizioni di esistenza, ponendo gli argomenti dei due logaritmi maggiori di zero:

$\begin{cases} x > 0 \\ 4x - 3 > 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{3}{4} \end{cases}$ $\quad x > \frac{3}{4}$

$2\ln x \geq \ln(4x-3)$ $\quad \ln x^2 \geq \ln(4x-3)$ $\quad x^2 \geq 4x - 3$

$x^2 - 4x + 3 \geq 0$ $\quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{1} \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right.$ $\quad x \leq 1 \ \vee \ x \geq 3$

Mettendo a sistema con le condizioni di esistenza: $\begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ x \leq 1 \ \vee \ x \geq 3 \end{cases}$ $\quad \underline{\underline{\frac{3}{4} < x \leq 1 \ \vee \ x \geq 3}}$

5. $\frac{1}{2}\log_3(x^2-9)=\frac{1}{2}+1$ $\qquad \frac{1}{2}\log_3(x^2-9)=\frac{3}{2}$ $\qquad \log_3(x^2-9)=3$

$\log_3(x^2-9)=3\log_3 3$ $\qquad \log_3(x^2-9)=\log_3 3^3$ $\qquad \log_3(x^2-9)=\log_3 27$

$x^2-9=27$ $\qquad x^2=36$ $\qquad \underline{\underline{x=\pm 6}}$ entrambe accettabili

6. $\left(\frac{5}{4}\right)^{x-1}=\left(\frac{4}{5}\right)^{x-3}$ $\qquad \left(\frac{5}{4}\right)^{x-1}=\left(\left(\frac{5}{4}\right)^{-1}\right)^{x-3}$ $\qquad \left(\frac{5}{4}\right)^{x-1}=\left(\frac{5}{4}\right)^{-x+3}$

$x-1=-x+3$ $\qquad 2x=4$ $\qquad \underline{\underline{x=2}}$

7. $6^{x^2+4x+4}>1$ $\qquad 6^{x^2+4x+4}>6^0$ $\qquad x^2+4x+4>0$

$(x+2)^2>0$ $\qquad \underline{\underline{\forall x\neq -2}}$

8. $\frac{5^{3x+1}\cdot 2^{x+2}}{2^{-2x+1}}\leq 1$ $\qquad 5^{3x+1}\cdot 2^{x+2+2x-1}\leq 1$ $\qquad 5^{3x+1}\cdot 2^{3x+1}\leq 1$

$10^{3x+1}\leq 10^0$ $\qquad 3x+1\leq 0$ $\qquad \underline{\underline{x\leq -\frac{1}{3}}}$

9. Verifica le seguenti uguaglianze:

a. $\log_a b=\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b}$

$$\log_a b=\frac{\log_{\sqrt{a}} b}{\log_{\sqrt{a}} a}=\frac{\log_{\sqrt{a}} b}{2}=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{a}} b=\log_{\sqrt{a}} b^{\frac{1}{2}}=\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b}$$

b. $\log_a b=\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{b}$

$$\log_a b=\frac{\log_{\frac{1}{a}} b}{\log_{\frac{1}{a}} a}=\frac{\log_{\frac{1}{a}} b}{-1}=-\log_{\frac{1}{a}} b=\log_{\frac{1}{a}} b^{-1}=\log_{\frac{1}{a}}\frac{1}{b}$$

c. $\log_a b=2\log_{a^2} b$

$$\log_a b=\frac{\log_{a^2} b}{\log_{a^2} a}=\frac{\log_{a^2} b}{\frac{1}{2}}=2\log_{a^2} b$$

10. Rappresenta la seguente funzione: $y = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x & x \leq 0 \\ \sqrt{1 - x^2 + 2x} & 0 < x < 2 \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2} & x \geq 2 \end{cases}$

La prima è una funzione esponenziale decrescente, avendo la base minore di 1.

La seconda è la circonferenza di centro (1; 0) e raggio $\sqrt{2}$, rappresentata solo nella sua parte superiore e tale che 0 < x < 2.

La terza è una retta.