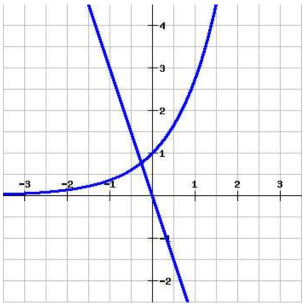
1. Risolvi graficamente:
   a. $e^x + 3x = 0$
   b. $5x + 2 \geq \sqrt{-x^2 + 4}$

a. $e^x + 3x = 0$

$e^x = -3x$

$\begin{cases} y = e^x \\ y = -3x \end{cases}$



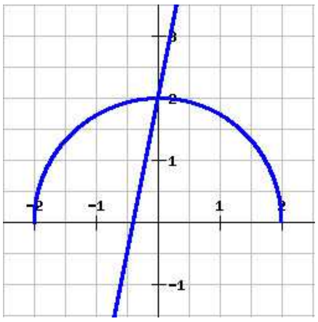
Il sistema ha una sola soluzione, compresa tra – 0,5 e 0.

b. $5x + 2 \geq \sqrt{-x^2 + 4}$

C.E. $-x^2 + 4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -2 \leq x \leq 2$

$y = \sqrt{-x^2 + 4} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

$y = 5x + 2$



Confrontando il risultato grafico con le c.e. otteniamo:

$0 \leq x \leq 2$

2. Determina l'equazione dell'ellisse avente vertice A (5; 0), con i fuochi sull'asse x e di eccentricità 4/5.

$$\begin{cases} e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5} \\ a = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 4 \\ a = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 16 \\ a = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 5 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

3. Determina l'equazione dell'iperbole omografica passante per l'origine e con centro di simmetria nel punto (3; 2).

La generica equazione dell'iperbole omografica è: $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

Passando per l'origine, l'equazione diventa: $y = \dfrac{ax}{cx + d}$

Le generiche coordinate del centro di simmetria sono: $\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c}\right)$

Perciò: $$\begin{cases} -\dfrac{d}{c} = 3 \\ \dfrac{a}{c} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = -3c \\ a = 2c \end{cases} \Rightarrow y = \frac{2cx}{cx - 3c} = \frac{2cx}{c(x-3)} \Rightarrow y = \frac{2x}{x-3}$$

4. Determina l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x e passante per i punti $A\,(4;\,4)$ e $B\,(3;\,\sqrt{2})$. Determina inoltre l'equazione della retta *r* tangente all'iperbole nel punto A e calcola l'area del triangolo formato da *r* con gli assi cartesiani.

La generica equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x è: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

che può essere anche scritta come: $A\,x^2 - B\,y^2 = 1$

Sostituendo in quest'equazione le coordinate dei punti A e B, ottengo due equazioni che mi danno il sistema:

$$\begin{cases} 16A - 16B = 1 \\ 9A - 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7A - 14B = 0 \\ 9A - 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2B \\ 18A - 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{8} \\ B = \dfrac{1}{16} \end{cases}$$

L'equazione dell'ellisse è: $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

Per determinare l'equazione della retta tangente nel punto A, applico la regola di sdoppiamento:

$$r: \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x - y = 4$$

Stabilisco le coordinate dei punti di intersezione della retta r con gli assi cartesiani, mettendo a sistema l'equazione della retta prima con l'equazione dell'asse x e poi con quella dell'asse y:

$$C: \begin{cases} y = 0 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C\,(2;\,0)$$

$$D: \begin{cases} x = 0 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow D\,(0;\,-4)$$

Il triangolo è rettangolo, perciò per calcolarne l'area basta determinare il semiprodotto dei cateti:

$$A = \frac{\overline{CO} \cdot \overline{DO}}{2} = \frac{x_C \cdot |y_D|}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$$