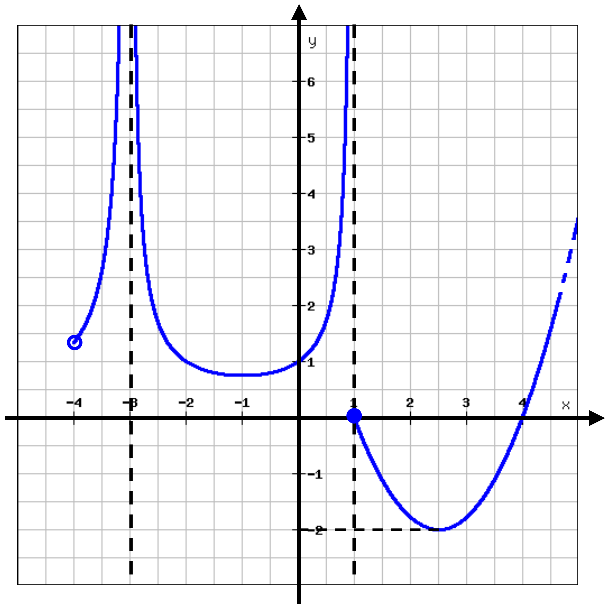
1. Dal grafico della seguente funzione, deduci:



Dominio $]-4;-3[\,\cup\,]-3;+\infty[$

Codominio $[-2;+\infty[$

indica se la funzione è limitata o illimitata illimitata superiormente

estremo superiore $\sup_{f(x)}=+\infty$

estremo inferiore $\inf_{f(x)}=-2$

massimo non esiste

minimo $\min_{f(x)}=-2$

punti di intersezione con gli assi cartesiani

$A(0;1)\quad B(1;0)\quad C(4;0)$

intervalli di positività $]-4;-3[\,\cup\,]-3;1[\,\cup\,[4;+\infty[$

equazioni degli asintoti $x=-3\quad x=1$

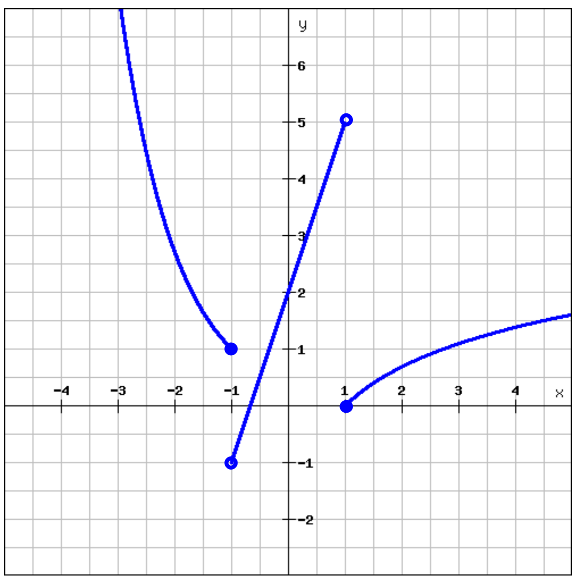
$\lim_{x\to -4^-} f(x)=\nexists$ $\lim_{x\to -4^+} f(x)=1{,}3$

$\lim_{x\to -3^-} f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to -3^+} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to 1^+} f(x)=0$ $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to -4} f(x)=\nexists$

2. Rappresenta la funzione: $f(x)=\begin{cases} e^{-x-1} & per\ x\le -1 \\ 3x+2 & per\ -1<x<1 \\ \ln x & per\ x\ge 1 \end{cases}$

a. Trova il dominio.
b. Indica se ha estremo superiore e inferiore, se ha massimo e minimo.



Dominio della funzione: $]-\infty;+\infty[$

$\inf_{f(x)}=-1$ $\sup_{f(x)}=+\infty$

$\min_{f(x)}\ /$ $\max_{f(x)}\ /$

La funzione non ammette né massimo né minimo, perché è una funzione illimitata superiormente e il codominio è aperto:

$$C=]-1;+\infty[$$

3. Dai la definizione di estremo inferiore e di minimo. Dato l'insieme: $A = \left\{ x \mid x = \frac{n-1}{n^2-1},\ n \in N - \{0;1\} \right\}$, verifica che ha estremo inferiore 0 e stabilisci se è anche minimo.

Estremo inferiore di un insieme: Dato un insieme E inferiormente limitato, si dice estremo inferiore di E quel numero reale L, se esiste, tale che:

- $x \geq L,\ \forall x \in E$;
- $\forall \varepsilon > 0$ è possibile trovare almeno un elemento $x \in E$ minore di $(L + \varepsilon)$

Se l'estremo inferiore appartiene all'insieme, si dice MINIMO, $\min_E$.

Verifico innanzi tutto che l'estremo inferiore dell'insieme è 0.

a. $\forall x \in A$ deve essere $x \geq 0$, ossia:

$$\frac{n-1}{n^2-1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{n-1}{(n-1)(n+1)} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad n > -1 \quad \text{vera } \forall n \in N$$

b. $0 \notin A$, infatti l'equazione $\frac{n-1}{n^2-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} = 0$ è impossibile, perciò 0 non è minimo per l'insieme A.

c. Perché 0 sia l'estremo inferiore $\forall \varepsilon > 0$ devo trovare almeno un elemento x di A tale che $x < 0 + \varepsilon$:

$$\frac{n-1}{n^2-1} < 0 + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad n > -1 + \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{vera } \forall n \in N$$

0 è un estremo inferiore per l'insieme A, ma non è minimo

4. Applicando la definizione di limite, verifica che $\lim_{x \to 4} (2x+1) = 9$.

Si dice che $\lim_{x \to 4} (2x+1) = 9$ se $\forall \varepsilon > 0\ \exists I(4)\colon \forall x \in I$ con al più $x \neq 4$ si verifica che $\left| f(x) - 9 \right| < \varepsilon$.
Risolviamo la disequazione in valore assoluto e verifichiamo che tra le soluzioni c'è un intorno di 4:

$$\left| 2x + 1 - 9 \right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad |2x - 8| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon < 2x - 8 < \varepsilon$$

Dividendo tutti i membri per 2 ottengo: $-\frac{\varepsilon}{2} < x - 4 < \frac{\varepsilon}{2}$

Aggiungendo 4 a tutti i membri ottengo: $4 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 4 + \frac{\varepsilon}{2}$ che è un intorno di 4. Il limite è verificato.

5. Sono dati gli insiemi A = { 1, 2, 3, 4 } e B = { a, b, c }. Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di A in B, ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biettive? (Quesito 2, Esame di Stato 2009)

Una funzione si dice suriettiva, quando ogni elemento del codominio B è immagine di almeno un elemento di A. Poiché A ha quattro elementi e B tre, sono suriettive tutte le funzioni in cui due elementi di A hanno uguale immagine in B.
Una funzione si dice iniettiva, quando ogni elemento di B è immagine al più di un elemento di A. Poiché A ha quattro elementi e B tre, non esistono funzioni iniettive, visto che c'è sempre un elemento di B immagine di due diversi elementi di A.
Una funzione si dice biettiva quando è sia iniettiva che suriettiva. Non esistendo funzioni iniettive, non esistono nemmeno funzioni biettive.