1. $\int \sqrt{1+4x}\, dx$ Pongo: $t = \sqrt{1+4x} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{t^2-1}{4} \quad \Rightarrow \quad dx = \dfrac{t}{2}\, dt$

$$\int t \cdot \frac{t}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int t^2\, dt = \frac{1}{6}t^3 + c = \underline{\underline{\frac{(1+4x)\sqrt{1+4x}}{6} + c}}$$

2. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx$ Pongo: $t = \sqrt{x+1} \quad \Rightarrow \quad x = t^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad dx = 2t\, dt$

$$\int \frac{t^2-1}{t} 2t\, dt = 2\int (t^2-1)\, dt = \frac{2}{3}t^3 - 2t + c = \underline{\underline{\frac{2}{3}\sqrt{x+1}\,(x-2) + c}}$$

3. $\int \dfrac{x^4+1}{x^2-5x+4}\, dx$ Eseguiamo la divisione tra numeratore e denominatore

$$\begin{array}{ccccc|c}
x^4 & & & & 1 & x^2-5x+4 \\
\cline{6-6}
-x^4 & +5x^3 & -4x^2 & & & x^2+5x+21 \\
\cline{1-5}
 & +5x^3 & -4x^2 & & 1 & \\
 & -5x^3 & +25x^2 & -20x & & \\
\cline{2-5}
 & & +21x^2 & -20x & 1 & \\
 & & -21x^2 & +105x & -84 & \\
\cline{3-5}
 & & & 85x & -83 &
\end{array}$$

$$\int \frac{x^4+1}{x^2-5x+4}\, dx = \int \left(x^2 + 5x + 21 + \frac{85x-83}{x^2-5x+4} \right) dx$$

$$\frac{85x-83}{x^2-5x+4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-4} \qquad \Rightarrow \qquad 85x - 83 = x\,(A+B) - 4A - B$$

$$\begin{cases} A + B = 85 \\ -4A - B = -83 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = -\dfrac{2}{3} \\ B = \dfrac{257}{3} \end{cases}$$

$$= \int \left(x^2 + 5x + 21 - \frac{\frac{2}{3}}{x+1} + \frac{\frac{257}{3}}{x+2} \right) dx = \underline{\underline{\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 21x - \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{257}{3}\ln|x-4| + c}}$$

4. $\int e^x \, sen\, x \, dx$ $\qquad f(x)=e^x \qquad f'(x)=e^x$

$\qquad g'(x)=sen\,x \qquad g(x)=-\cos x$

$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \qquad f(x)=e^x \qquad f'(x)=e^x$

$\qquad g'(x)=\cos x \qquad g(x)=sen\,x$

$= -e^x \cos x + e^x \, sen\, x - \int e^x \, sen\, x \, dx$

$2\int e^x \, sen\, x \, dx = -e^x \cos x + e^x \, sen\, x \quad \Rightarrow \quad \int e^x \, sen\, x \, dx = \underline{\underline{\dfrac{e^x}{2}(sen\, x - \cos x) + c}}$

5. $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 5)\, dx = \left[x^3 - x^2 + 5x\right]_0^2 = 8 - 4 + 10 = \underline{\underline{14}}$

6. $\int_0^{\frac{1}{2}} (4x+1)^3 \, dx = \dfrac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} 4(4x+1)^3 \, dx = \left[\dfrac{(4x+1)^4}{16}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3^4}{16} - \dfrac{1}{16} = \dfrac{81-1}{16} = \underline{\underline{5}}$

7. $\int_0^9 (\sqrt{x} - x)\, dx = \left[\dfrac{2}{3}x\sqrt{x} - \dfrac{x^2}{2}\right]_0^9 = 18 - \dfrac{81}{2} = \underline{\underline{-\dfrac{45}{2}}}$

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 2\, sen\, x)\, dx = [sen\, x - 2\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 - 0 + 2 = \underline{\underline{3}}$

9. $\int_{-1}^0 (e^x + e^{2x})\, dx = \left[e^x + \dfrac{e^{2x}}{2}\right]_{-1}^0 = 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{2e^2} = \underline{\underline{\dfrac{3e^2 - 2e - 1}{2e^2}}}$

10. $\int_1^{\sqrt{3}} \dfrac{3}{1+x^2}\, dx = [3\, arctg\, x]_1^{\sqrt{3}} = 3\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \underline{\underline{\dfrac{\pi}{4}}}$

11. Determina la misura dell'area della parte di piano delimitata dalla curva di equazione $y = -x^2 + 4x - 3$ e dall'asse delle x.

Determino innanzi tutto le intersezioni della parabola con l'asse delle x:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 4x - 3 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{1} = \left\langle \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right.$$

Calcolo l'integrale definito:

$$\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right]_1^3 = -9 + 18 - 9 + \frac{1}{3} - 2 + 3 = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

12. Calcola la misura del volume determinato dalla rotazione intorno all'asse x della figura limitata dalla parabola $y = -x^2 + 3x$ e dall'asse x.

Determino le intersezioni della parabola con l'asse x:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 3x \\ y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \left\langle \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix} \right.$$

Calcolo l'integrale definito:

$$\pi \int_0^3 (-x^2 + 3x)^2\, dx = \pi \int_0^3 (x^4 - 6x^3 + 9x^2)\, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}x^4 + 3x^3 \right]_0^3 = 3^4 \pi \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{2} + 1 \right) = \underline{\underline{\frac{81}{10}\pi}}$$

13. Data la parabola di equazione $y = -x^2 + 5x - 4$, calcola la misura dell'area della parte di piano limitata dall'asse y, dalla curva e dalla tangente alla curva nel punto di ascissa 2.

Determino innanzi tutto le coordinate del punto della parabola di ascissa 2, sostituendo l'ascissa nell'equazione della parabola:

$$P\,(2;\,2)$$

Determino l'equazione della tangente alla parabola, calcolando in primo luogo il valore della derivata dell'equazione della parabola nel punto di ascissa 2, ovvero il coefficiente angolare della retta tangente:

$$f'(x) = -2x + 5 \quad \Rightarrow \quad m = f'(2) = 1$$

Conoscendo le coordinate del punto e il coefficiente angolare, posso calcolare l'equazione della retta:

$$t:\ y - 2 = 1\,(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = x$$

Ora posso impostare l'integrale definito:

$$\int_0^2 (x + x^2 - 5x + 4)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right]_0^2 = \frac{8}{3} - 8 + 8 = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$$