1. Dopo aver verificato che il triangolo di vertici A (1; 4), B (4; – 2) e C (10; 1) è rettangolo isoscele, calcolane l'area e il perimetro.

Determino innanzi tutto le lunghezze dei lati del triangolo:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (6)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-9)^2 + (3)^2} = 3\sqrt{10}$$

Il triangolo è perciò isoscele sulla base BC (come si intuisce anche dal disegno).

Con il teorema di Pitagora, verifico se si tratta di un triangolo rettangolo. Deve essere verificata la relazione:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \quad \Rightarrow \quad (3\sqrt{10})^2 = (3\sqrt{5})^2 + (3\sqrt{5})^2 \quad \Rightarrow \quad 90 = 45 + 45 \quad c.v.d.$$

Ottengo il perimetro come somma delle misure dei lati: $\boxed{2p = 6\sqrt{5} + 3\sqrt{10}}$

Per l'area, trattandosi di un triangolo rettangolo, applico la formula: $A_{ABC} = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \dfrac{3\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5}}{2} = \boxed{\dfrac{45}{2}}$

2. Conduci dal punto P (0; 4) le tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 8 = 0$.

Verifico innanzi tutto se il punto P è esterno alla circonferenza sostituendo le sue coordinate nell'equazione della circonferenza:

$$0^2 + 4^2 - 8 \cdot 0 + 2 \cdot 4 - 8 = 16 + 8 - 8 > 0$$

Considero il fascio di rette con centro in P: $y - 4 = m(x - 0)$.

Dato il centro C (4; – 1) della circonferenza e il raggio $r = \sqrt{4^2 + 1^2 + 8} = 5$, pongo la distanza del centro dalla generica retta uguale al raggio:

$$\frac{|4m + 1 + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 5 \quad \Rightarrow \quad |4m + 5| = 5\sqrt{m^2 + 1}$$

Elevando a quadrato entrambi i membri, ottengo i due valori di *m* che, sostituiti nell'equazione del fascio, mi danno le equazioni delle due rette tangenti:

$$16m^2 + 25 + 40m = 25m^2 + 25 \quad \Rightarrow \quad -9m^2 + 40m = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 0; \quad m = \frac{40}{9}$$

$$\boxed{t_1 : y = 4} \qquad \boxed{t_2 : y = \frac{40}{9}x + 4}$$

3. La retta di equazione $3x - y - 2 = 0$ interseca la circonferenza $x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0$ nei punti A e B. Calcola la misura della corda $\overline{AB}$.

Determino le intersezioni tra la retta e la circonferenza mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6y - 16 = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y+2}{3} \\ \dfrac{y^2 + 4y + 4}{9} + y^2 - 6y - 16 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{y+2}{3} \\ y^2 - 5y - 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y+2}{3} \\ y_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 7 \\ -2 \end{matrix} \right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}; \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

I due punti sono $A(3; 7)$ e $B(0; -2)$.

Calcolo la lunghezza del segmento $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (7+2)^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} = \boxed{3\sqrt{10}}$$

4. Determina i coefficienti a, b, c nell'equazione della parabola y = ax^2 + bx + c, sapendo che essa passa per i punti A (0; – 2), B (2; 2) e che ha come asse di simmetria la retta $x = 3$.

Per determinare l'equazione della parabola, impongo il passaggio della parabola per i punti A e B sostituendo le coordinate dei punti nella generica equazione; come terza condizione sfrutto l'equazione dell'asse di simmetria, che ha generica equazione $x = -\dfrac{b}{2a}$ e pongo la sua generica equazione uguale a quella data. Ottengo così il sistema:

$$\begin{cases} -2 = 0a + 0b + c \\ 2 = 4a + 2b + c \\ -\dfrac{b}{2a} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -6a \\ c = -2 \\ 2 = 4a + 2\cdot(-6a) - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -6a \\ c = -2 \\ 4a - 12a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases}$$

L'equazione della parabola è quindi: $\boxed{y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - 2}$

5. Data la parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 3$, determina l'equazione della tangente alla parabola nel suo punto di ascissa – 1.

Determino le coordinate del punto di ascissa – 1 della parabola e poi applico la regola dello sdoppiamento per determinare l'equazione della retta tangente alla parabola:

$$y = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8 \qquad \Rightarrow \qquad P\ (-1; 8)$$

Applicando la regola dello sdoppiamento: $\dfrac{y + y_0}{2} = a\ x\ x_0 + b\ \dfrac{x + x_0}{2} + c$

ottengo: $\dfrac{y+8}{2} = x \cdot (-1) - 4\ \dfrac{x-1}{2} + 3 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{6x + y - 2 = 0}$

6. Determina l'equazione del fascio di parabole con asse parallelo all'asse y, passanti per i punti A (– 1; – 1) e B (2; 2). Trova poi la parabola del fascio che ha il vertice di coordinate V (1; 3).

Determino innanzi tutto l'equazione del fascio di parabole secanti, di generica equazione

$$y = mx + 1 + k\ (x - x_A)\ (x - x_B)$$

dove $y = mx + q$ è la generica retta passante per A e B:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x+1}{2+1} = \frac{y+1}{2+1} \qquad \Rightarrow \qquad x = y$$

Perciò l'equazione del fascio diventa: $y = x + k\ (x+1)\ (x-2) \qquad \Rightarrow \qquad y = k\,x^2 + x\ (1-k) - 2k$

Sostituendo nell'equazione le coordinate del vertice ottengo la parabola richiesta:

$$3 = k \cdot 1^2 + 1\,(1-k) - 2k \qquad \Rightarrow \qquad 3 = k + 1 - k - 2k \qquad \Rightarrow \qquad -2k = 2 \qquad \Rightarrow \qquad k = -1$$

E quindi, sostituendo il valore di k così ottenuto, la parabola ha equazione: $\boxed{y = -x^2 + 2x + 2}$