1. Ricava l'equazione di ciascuna delle circonferenze rappresentate, spiegando in maniera esauriente il procedimento che seguirai, prima di svolgere i calcoli necessari:

   A. Nel primo caso, conosco tre punti per cui passa la circonferenza: A (0; 4), B (– 5; 0) e O (0; 0)

   Determino le equazioni degli assi delle due corde AO e BO, le metto a sistema e determino il centro della circonferenza:

$$\begin{cases}(x+5)^2+(y-0)^2=(x-0)^2+(y-0)^2\\(x-0)^2+(y-4)^2=(x-0)^2+(y-0)^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{5}{2}\\y=2\end{cases}$$

   Conoscendo il centro della circonferenza e sapendo che passa per l'origine, posso determinarne facilmente l'equazione:

$$\boldsymbol{x^2+y^2+5x-4y=0}$$

   In modo più semplice, posso notare che il triangolo ABO, inscritto nella circonferenza, è rettangolo in O. Un triangolo rettangolo inscritto in una circonferenza, ha l'ipotenusa coincidente con il diametro, perciò il centro della circonferenza sarà il punto medio del segmento AB. Sapendo che la circonferenza passa per l'origine, so che il termine noto dell'equazione è nullo e arrivo più agevolmente all'equazione della circonferenza.

   B. Nel secondo caso, so che il centro della circonferenza coincide con l'origine degli assi cartesiani e che la circonferenza passa per il punto A (0; 3).

   In altre parole, conosco il centro O (0; 0) e il raggio OA = 3, perciò:

$$\boldsymbol{x^2+y^2=9}$$

   C. Nel terzo caso, so che la circonferenza è tangente agli assi cartesiani nei punti A (0; 2) e B (– 2; 0).

   Mettendo a sistema la retta passante per A e perpendicolare all'asse y, ovvero y = 2 e la retta passante per B e perpendicolare all'asse x, ovvero x = – 2 (in quanto il raggio tracciato nel punto di tangenza è perpendicolare alla tangente), posso determinare le coordinate del centro C della circonferenza, ovvero C (– 2; 2). A questo punto, ricavo facilmente il raggio, 2, e l'equazione della circonferenza:

$$\boldsymbol{x^2+y^2+4x-4y+4=0}$$

   D. Nel quarto caso, conosco il centro C (– 1; 0) della circonferenza e so che passa per il punto A (2; 4).

   Determino il raggio della circonferenza, come distanza tra il centro e il punto A della circonferenza:

$$r=\overline{AC}=\sqrt{(2+1)^2+(4-0)^2}=5$$

   Perciò, avendo centro e raggio, posso determinare l'equazione della circonferenza:

$$\boldsymbol{x^2+y^2+2x-24=0}$$

2. Determina l'equazione della circonferenza passante per i punti A (– 2; 4), B (– 1; 3) ed avente centro sulla retta di equazione 2x – 3y + 2 = 0.

   Metto a sistema l'equazione dell'asse del segmento AB e l'equazione della retta data, per determinare le coordinate del centro:

$$\begin{cases}(x+2)^2+(y-4)^2=(x+1)^2+(y-3)^2\\2x-3y+2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-y+5=0\\2x-3y+2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-13\\y=-8\end{cases} \quad \boldsymbol{C\ (-13;-8)}$$

   Determino la misura del raggio: $r=\overline{AC}=\sqrt{(-13+2)^2+(-8-4)^2}=\sqrt{265}$

   Conoscendo centro e raggio, posso determinare l'equazione della circonferenza:

$$(x+13)^2+(y+8)^2=265 \Rightarrow \boldsymbol{x^2+y^2+26x+16y-32=0}$$

3. Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - x - y = 0$, determina le equazioni delle tangenti ad essa nei suoi punti di intersezione con gli assi cartesiani.

Determino innanzi tutto le intersezioni della circonferenza con gli assi cartesiani, mettendo a sistema l'equazione della circonferenza prima con l'asse x e poi con l'asse y:

$$\begin{cases} x^2+y^2-x-y=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow O\,(0;0) \quad A\,(1;0)$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-x-y=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2-y=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow O\,(0;0) \quad B\,(0;1)$$

Utilizzo la regola di sdoppiamento per determinare le equazioni delle tangenti:

$$t_O: -\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=0 \Rightarrow \boldsymbol{x+y=0} \qquad t_A: x-\frac{x+1}{2}-\frac{y}{2}=0 \Rightarrow \boldsymbol{x-y-1=0} \qquad t_B: y-\frac{x}{2}-\frac{y+1}{2}=0 \Rightarrow \boldsymbol{x-y+1=0}$$

4. Determina le equazioni delle tangenti alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x + 3y = 0$ parallele alla retta di equazione $2x - 3y + 6 = 0$.

PRIMO METODO:

Determino centro e raggio della circonferenza data: $C\left(1; -\frac{3}{2}\right) \quad r=\sqrt{1+\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Considero il fascio improprio di rette parallele alla retta data: $2x-3y+k=0$. Pongo la distanza del centro della circonferenza dalla generica retta del fascio uguale al raggio e in questo modo determino le due rette tangenti:

$$\frac{\left|2+\frac{9}{2}+k\right|}{\sqrt{4+9}}=\frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow |13+2k|=13 \Rightarrow 2k+13=\pm 13 \Rightarrow \begin{matrix} k_1=0 \\ k_2=-13 \end{matrix}$$

Le equazioni delle due tangenti sono: $\boldsymbol{2x-3y=0}$ e $\boldsymbol{2x-3y-13=0}$.

SECONDO METODO:

Considero il fascio di rette parallele alla retta data: $y=\frac{2}{3}x+k$. Metto a sistema l'equazione del fascio con quella della circonferenza e pongo $\Delta=0$ nell'equazione risolvente, per determinare le equazioni delle tangenti:

$$\begin{cases} y=\frac{2}{3}x+k \\ x^2+y^2-2x+3y=0 \end{cases} \qquad x^2+\left(\frac{2}{3}x+k\right)^2-2x+3\left(\frac{2}{3}x+k\right)=0$$

$$x^2+\frac{4}{9}x^2+k^2+\frac{4}{3}x\,k-2x+2x+3k=0 \qquad 13x^2+12x\,k+9k^2+27k=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=36k^2-13\,(9k^2+27k)=0 \qquad 3k^2+13k=0 \qquad \left\langle \begin{matrix} k=0 \\ k=-\frac{13}{3} \end{matrix} \right.$$

Le equazioni delle due tangenti sono: $\boldsymbol{2x-3y=0}$ e $\boldsymbol{2x-3y-13=0}$.

TERZO METODO:

Determino il centro della circonferenza data: $C\left(1; -\frac{3}{2}\right)$ e determino la retta perpendicolare alla retta data e passante per il centro:

$$y+\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}(x-1) \qquad y=-\frac{3}{2}x$$

Metto a sistema l'equazione della retta data con la circonferenza e determino i punti di intersezione, che corrispondono ai punti di tangenza:

$$\begin{cases} y=-\frac{3}{2}x \\ x^2+y^2-2x+3y=0 \end{cases} \qquad x^2+\frac{9}{4}x^2-2x-\frac{9}{2}x=0 \qquad x^2-2x=0$$

$$O(0;0) \qquad A(2;-3)$$

Determino ora le rette passanti per i punti dati e parallele alla retta data e queste sono le tangenti richieste:

$$y-0=\frac{2}{3}(x-0) \qquad \boldsymbol{2x-3y=0} \qquad\qquad y+3=\frac{2}{3}(x-2) \qquad \boldsymbol{2x-3y-13=0}$$

5. Determina per quali valori di k l'equazione $x^2 + y^2 + 2kx + 6ky + 10 = 0$ rappresenta una circonferenza.

Pongo la condizione di realtà: $k^2 + 9k^2 - 10 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k \leq -1} \ \vee \ \boldsymbol{k \geq 1}$

6. Calcola l'area del triangolo che ha un vertice nel centro della circonferenza $x^2 + y^2 + y - 2 = 0$ e i rimanenti nei punti staccati dalla circonferenza sulla retta s: $x + y - 1 = 0$.

PRIMO METODO:

Determino il centro C della circonferenza: $C\left(0; -\frac{1}{2}\right)$. Determino gli altri punti, mettendo a sistema l'equazione della retta e quella della circonferenza:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + y - 2 = 0 \\ x = 1 - y \end{cases} \Rightarrow \quad y^2 + 1 - 2y + y^2 + y - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y^2 - y - 1 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \left\langle \begin{array}{l} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right. \qquad A(0;1) \quad B\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

Il triangolo è rettangolo dato che ha i cateti paralleli agli assi, di misura $\overline{AC} = \frac{3}{2}$ e $\overline{CB} = \frac{3}{2}$ (visto che sono i raggi della circonferenza). Posso calcolare l'area del triangolo come semiprodotto dei cateti:

$$A_{ABC} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{9}{8}}$$

<u>Oppure</u>: posso determinare la distanza di C dalla retta data – che contiene il lato AB – e poi determinare la lunghezza del lato AB e calcolare quindi l'area:

$$h = d(C;s) = \frac{\left|-\frac{1}{2} - 1\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{3}{4}\sqrt{2} \qquad \overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

ed ottengo l'area precedentemente calcolata.

<u>Oppure</u>: posso determinare la lunghezza del lato AB e l'altezza del triangolo – che so essere isoscele in quanto i due lati AC e CB coincidono con i raggi della circonferenza – determinando il punto medio di AB e la distanza di C da esso:

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \qquad M_{\overline{AB}}\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \overline{MC} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

SECONDO METODO:

Posso determinare la distanza di C dalla retta s data: $h = d(C;s) = \frac{\left|-\frac{1}{2}-1\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$

Il triangolo che si viene a formare è sicuramente isoscele, visto che i due lati AC e BC sono i raggi della circonferenza. Perciò, posso determinare la lunghezza dei due lati e, con il teorema di Pitagora, risalire alla lunghezza della base AB:

$$\overline{AC} = \overline{BC} = r = \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{3}{2} \qquad \overline{AB} = 2 \cdot \sqrt{\overline{AC}^2 - h^2} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{8}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

E posso quindi determinare l'area del triangolo:

$$A_{ABC} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{3}{4}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{9}{8}}$$

7. Scrivi l'equazione della circonferenza che ha centro C (2; 1) e stacca sulla bisettrice di primo e terzo quadrante una corda di misura$3\sqrt{2}$.

PRIMO METODO:
Determino la distanza del centro C dalla bisettrice:

$$d(C; bisettrice) = h = \frac{|2-1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Detti A e B i punti di intersezione tra la circonferenza e la bisettrice, il triangolo ABC è un triangolo isoscele, in quanto i lati AC e BC sono i raggi della circonferenza. Possiamo perciò applicare il teorema di Pitagora per determinare il raggio della circonferenza, ricordando che $\overline{AB} = 3\sqrt{2}$, ovvero la corda staccata dalla circonferenza sulla bisettrice:

$$\overline{AC} = \sqrt{\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

Conoscendo centro e raggio, posso facilmente determinare l'equazione della circonferenza:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \qquad \boldsymbol{x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0}$$

SECONDO METODO:
Metto a sistema la generica equazione della circonferenza, ovvero la circonferenza di centro noto, con l'equazione della bisettrice di primo e terzo quadrante. Ricavo le coordinate dei punti di intersezione in funzione del parametro e pongo la lunghezza della corda uguale alla misura data:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y + k = 0 \\ x = y \end{cases} \Longrightarrow \quad 2x^2 - 6x + k = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-2k}}{2}$$

Le coordinate dei due punti sono: $A\left(\frac{3+\sqrt{9-2k}}{2}; \frac{3+\sqrt{9-2k}}{2}\right)$ e $B\left(\frac{3-\sqrt{9-2k}}{2}; \frac{3-\sqrt{9-2k}}{2}\right)$. Pongo la loro distanza uguale a $3\sqrt{2}$.

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{9-2k}}{2} - \frac{3-\sqrt{9-2k}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3+\sqrt{9-2k}}{2} - \frac{3-\sqrt{9-2k}}{2}\right)^2} = \sqrt{18-4k} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{9-2k} = 3 \quad \Longrightarrow \begin{cases} 9-2k = 9 \\ 9-2k \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k \leq \frac{9}{2} \end{cases}$$

Perciò l'equazione della circonferenza è: $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0}$

8. Determina l'equazione della circonferenza che ha il centro sulla retta x – 3y + 2 = 0, che passa per il punto A (– 4; 0) e che ha raggio 2, scegliendo fra le due quella con il centro di ordinata negativa.

Pongo la distanza del punto A dal centro C uguale al raggio 2 e la metto a sistema con la retta cui appartiene il centro:

$$\begin{cases} (x+4)^2 + (y-0)^2 = 4 \\ x = 3y - 2 \end{cases} \Longrightarrow \quad (3y+2)^2 + y^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad 10y^2 + 12y = 0 \quad \left\langle \begin{array}{l} y = 0 \\ y = -\frac{6}{5} \end{array} \right.$$

Posso determinare l'equazione della circonferenza di centro $C\left(-\frac{28}{5}; -\frac{6}{5}\right)$ e raggio 2:

$$\left(x + \frac{28}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{6}{5}\right)^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{5x^2 + 5y^2 + 56x + 12y + 144 = 0}$$

9. Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 16x - 6y + 56 = 0$, determina:
   a. le equazioni delle tangenti nei suoi punti A e B di ascissa 4;
   b. l'area del quadrilatero avente per vertici i punti A, B, il centro C della circonferenza e il punto P d'intersezione delle due tangenti;
   c. l'equazione della circonferenza circoscritta al quadrilatero ACBP spiegando perché detto quadrilatero è sicuramente inscrittibile nella circonferenza.

a. Determino innanzi tutto le coordinate dei punti A e B di ascissa 4, sostituendo l'ascissa nell'equazione della circonferenza e determinando la corrispondente ordinata:

$$16 + y^2 - 64 - 6y + 56 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 6y + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A(4;2)} \quad \boldsymbol{B(4;4)}$$

Per determinare le equazioni delle tangenti nei punti A e B uso la formula di sdoppiamento:

$$t_A:\ 4x + 2y - 16 \cdot \frac{x+4}{2} - 6 \cdot \frac{y+2}{2} + 56 = 0 \quad \boldsymbol{4x + y - 18 = 0}$$

$$t_B:\ 4x + 4y - 16 \cdot \frac{x+4}{2} - 6 \cdot \frac{y+4}{2} + 56 = 0 \quad \boldsymbol{4x - y - 12 = 0}$$

b. Determino il punto P di intersezione tra le tangenti, mettendo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} 4x + y - 18 = 0 \\ 4x - y - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{15}{4} \\ y = 3 \end{cases} \qquad \boldsymbol{P\left(\frac{15}{4};3\right)}$$

Determino le coordinate del centro della circonferenza: C (8; 3).
Il quadrilatero che si è formato è un deltoide, perciò posso calcolarne l'area facendo il semiprodotto delle due diagonali, AB e PC:

$$\overline{PC} = \left|8 - \frac{15}{4}\right| = \frac{17}{4} \qquad \overline{AB} = |\,4-2\,| = 2 \qquad A_{ACBP} = \frac{17}{4} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{17}{4}}$$

c. Il quadrilatero è sicuramente inscrittibile in una circonferenza perché la somma degli angoli opposti è 180°, essendo $\overline{AP} \perp \overline{AC}$, dato che la tangente e il raggio tracciato per il punto di tangenza sono sempre perpendicolari e $\overline{BP} \perp \overline{BC}$ per lo stesso motivo. Perciò: $C\hat{A}P + C\hat{B}P = 180°$ e conseguentemente anche gli altri due angoli hanno somma 180°. Siccome i triangoli APC e BPC sono rettangoli e hanno l'ipotenusa PC in comune, PC è il diametro della circonferenza circoscritta al quadrilatero, perciò il raggio è la metà del diametro e il centro è il punto medio del diametro:

$$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{4} = \frac{17}{8} \qquad C'\left(\frac{\frac{15}{4}+8}{2};\frac{3+3}{2}\right) = \left(\frac{47}{8};3\right)$$

Posso quindi determinare l'equazione della circonferenza:

$$\left(x - \frac{47}{8}\right)^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{17}{8}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x^2 + y^2 - \frac{47}{4}x - 6y + 39 = 0}$$