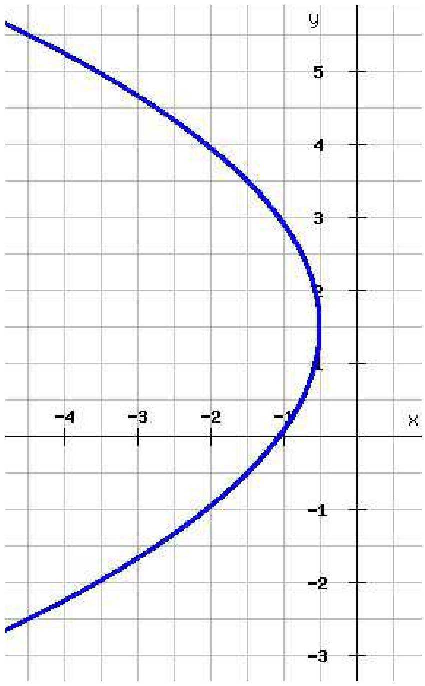
1. Determina l'equazione della parabola di vertice $V\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ e fuoco $F\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$. Dopo averla rappresentata, determina l'equazione della tangente alla parabola nel suo punto A di ordinata 3.

Poiché vertice e fuoco hanno la stessa ordinata, la parabola richiesta ha asse parallelo all'asse x. Ovvero, l'equazione generica della parabola è: $x = ay^2 + by + c$.

Eguaglio le coordinate generiche di vertice e fuoco a quelle date:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{-\Delta+1}{4a} = -\dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -3a \\ \Delta = 2a \\ \dfrac{-2a+1}{2a} = -3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} b = -3a \\ \Delta = 2a \\ -2a+1 = -6a \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{4} \\ b = +\dfrac{3}{4} \\ \dfrac{9}{16} + c = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\dfrac{1}{4} \\ b = +\dfrac{3}{4} \\ c = -\dfrac{17}{16} \end{cases}$$

Perciò l'equazione della parabola è: $\boldsymbol{x = -\frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{4}y - \frac{17}{16}}$.

Determino l'ascissa del punto A, sostituendo l'ordinata 3 nell'equazione della parabola:

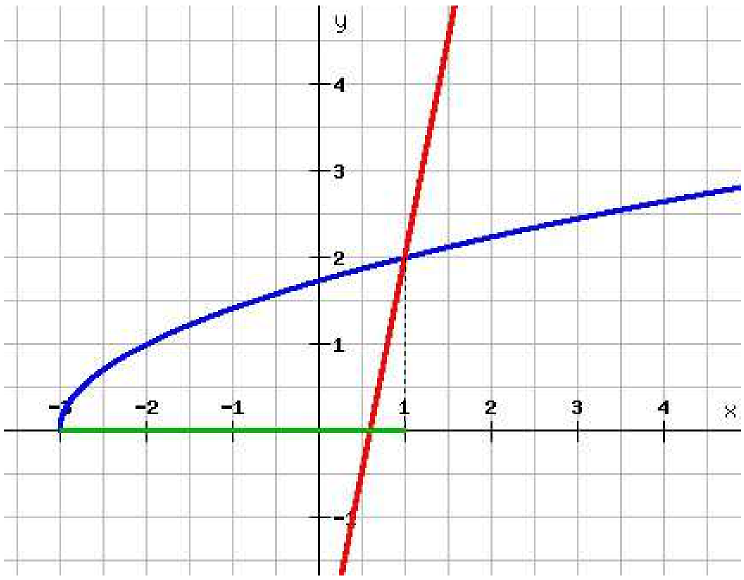
$$x = -\frac{9}{4} + \frac{9}{4} - \frac{17}{16} = -\frac{17}{16} \quad \Rightarrow \quad A\left(-\frac{17}{16};3\right).$$

Per determinare l'equazione della tangente alla parabola nel punto A, applico la formula di sdoppiamento:

$$\frac{x - \frac{17}{16}}{2} = -\frac{3}{4}y + \frac{3}{4}\cdot\frac{y+3}{2} - \frac{17}{16} \quad \Rightarrow$$

$$x - \frac{17}{16} = -\frac{3}{2}y + \frac{3}{4}y + \frac{9}{4} - \frac{17}{8} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{16x + 12y - 19 = 0}$$

2. Risolvi graficamente la seguente disequazione irrazionale: $\sqrt{x+3} > 5x - 3$



Dai due membri della disequazione, ricavo le equazioni di due funzioni: $y = \sqrt{x+3}$ e $y = 5x - 3$.

La prima funzione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x = y^2 - 3 \end{cases}$$

che rappresenta una metà parabola di vertice $V(-3;0)$. Il dominio di questa funzione è $x \geq -3$.

La seconda funzione è una retta passante per il punto $(0;-3)$, che intercetta l'arco di parabola nel punto di coordinate $(1;2)$.

Dal grafico possiamo dedurre la soluzione:

$$\boldsymbol{-3 \leq x < 1}$$

3. Studia la natura del fascio di parabole di equazione: $y = kx^2 - x\,(4k+1) + \ 4k + 5$. Determina poi:
   a. la parabola passante per il punto (1; 0);
   b. la parabola tangente alla retta $y = 3x - 5$;
   c. la parabola con concavità verso l'alto che stacca sulla retta y = 4 una corda di lunghezza $\sqrt{5}$.

Determino innanzi tutto le due parabole generatrici, eseguendo le moltiplicazioni e raccogliendo k:

$$y = kx^2 - 4kx - x + \ 4k + 5$$

$$y = -x + 5 \qquad x^2 - 4x + 4 = 0$$

Si tratta di due parabole degeneri: $y = -x + 5$ è la retta obliqua, tangente alle parabole del fascio.

$(x-2)^2 = 0$ è la parabola degenere data dalla retta parallela all'asse y e passante per il punto di tangenza, in questo caso $T\ (2; 3)$.

L'equazione rappresenta un fascio di parabole tangenti nel punto T (2; 3) alla retta $y = -x + 5$.

a. Per determinare la parabola passante per il punto (1; 0), sostituisco le coordinate del punto nell'equazione del fascio e in questo modo determino il valore del parametro, che, sostituito a sua volta nell'equazione del fascio, determina l'equazione della parabola richiesta.

$$0 = k - 4k - 1 + \ 4k + 5 \quad \Longrightarrow \quad k = -4 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{y = -4x^2 + 15x - 11}$$

b. Per determinare la parabola tangente alla retta data, metto a sistema l'equazione del fascio con quella della retta e pongo $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente. Determinato in questo modo il valore del parametro, lo sostituisco nell'equazione del fascio, determinando l'equazione della parabola richiesta.

$$\begin{cases} y = kx^2 - x\,(4k+1) + \ 4k + 5 \\ y = 3x - 5 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad kx^2 - x\,(4k+1) + \ 4k + 5 = 3x - 5$$

$$kx^2 - 4x\,(k+1) + \ 4k + 10 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 4\,(k+1)^2 - k\,(4k+10) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4\,k^2 + 8k + 4 - 4\,k^2 - 10k = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = 2$$

$$\boldsymbol{y = 2\,x^2 - 9x + 13}$$

c. Interseco il fascio di parabole con la retta y = 4 e pongo uguale a $\sqrt{5}$ la distanza tra i punti di intersezione così determinati:

$$\begin{cases} y = kx^2 - x\,(4k+1) + \ 4k + 5 \\ y = 4 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad kx^2 - x\,(4k+1) + \ 4k + 5 = 4$$

$$kx^2 - x\,(4k+1) + \ 4k + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{4k + 1 \pm \sqrt{16\,k^2 + 8k + 1 - 16\,k^2 - 4k}}{2k} = \frac{4k + 1 \pm \sqrt{4k+1}}{2k}$$

I due punti hanno coordinate $A\,\left(\frac{4k+1+\sqrt{4k+1}}{2k}; 4\right)$ e $B\,\left(\frac{4k+1-\sqrt{4k+1}}{2k}; 4\right)$.

$$\overline{AB} = \left| \frac{4k + 1 + \sqrt{4k+1}}{2k} - \frac{4k + 1 - \sqrt{4k+1}}{2k} \right| = \sqrt{5}$$

$$\left| \frac{\sqrt{4k+1}}{k} \right| = \sqrt{5} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{4k+1} = k\,\sqrt{5} \quad \Longrightarrow \quad 5k^2 - 4k - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+5}}{5}$$

I due valori del parametro sono 1 e $-\frac{1}{5}$, ma io devo determinare la parabola con concavità verso l'alto, perciò non posso accettare il valore negativo del parametro. La parabola così ottenuta è: $\boldsymbol{y = x^2 - 5x + 9}$.

4. Determina le equazioni delle parabole, con asse parallelo all'asse y, passanti per i punti A (1; 0) e B (2; 3) e con il vertice sulla retta di equazione x – 2y – 1 = 0.

Determino innanzi tutto l'equazione del fascio di parabole con punti fissi A e B.

Comincio determinando l'equazione della retta passante per A e per B:

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-0}{3-0} \qquad y=3x-3$$

Considero poi la parabola degenere data dall'unione delle rette parallele all'asse y passanti per i punti A e B:

$$(x-1)(x-2)=0 \qquad x^2-3x+2=0$$

Il fascio di parabole ha equazione:

$$y=3x-3+k(x^2-3x+2) \qquad y=kx^2+3x(1-k)+2k-3$$

Determino le generiche coordinate del vertice:

$$V\left(\frac{3k-3}{2k};\frac{-9k^2+18k-9+8k^2-12k}{4k}\right)=\left(\frac{3k-3}{2k};\frac{-k^2+6k-9}{4k}\right)$$

Sostituisco le coordinate generiche del vertice nell'equazione della retta data. In questo modo, determino il corrispondente valore del parametro k e, sostituendolo nell'equazione del fascio di parabole, ottengo le parabole richieste:

$$\frac{3k-3}{2k}-2\frac{-k^2+6k-9}{4k}-1=0$$

$$3k-3+k^2-6k+9-2k=0$$

$$k^2-5k+6=0 \qquad k_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\left\langle\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right.$$

Le due parabole hanno equazione: $\boldsymbol{y=3x^2-6x+3}$ e $\boldsymbol{y=2x^2-3x+1}$.