

31. Determina l'area del quadrilatero di vertici A (-3; -2), B (-1; 3), C (4; 0), D (4; -5).

Calcolo l'area del quadrilatero, come composto dai due triangoli ABC e CDA, dopodichè sommo le due aree:

$$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{CDA}$$

$$A_{ABC} = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2} [-9 - 8 + 0 - (12 + 0 + 2)] \right| = \frac{1}{2} (31) = \frac{31}{2}$$

$$A_{CDA} = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2} [-20 + 0 - 8 - (15 + 0 - 8)] \right| = \frac{1}{2} (35) = \frac{35}{2}$$

$$A = 33$$

32. Verifica che il triangolo di vertici A (2; 1), B (3; 4), C (9; 2) è rettangolo e calcolane perimetro e area.

Determino il coefficiente angolare dei lati AB e BC e verifico che sono uno l'antireciproco dell'altro:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{4-1}{3-2} = 3 \quad m_{\overline{BC}} = \frac{4-2}{3-9} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \overline{AB} \perp \overline{BC}$$

Determino la lunghezza dei lati del triangolo:

$$\overline{AB} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \quad \overline{BC} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \quad \overline{AC} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Calcolo l'area e il perimetro:

$$A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10}}{2} = 10 \quad 2p = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} = \sqrt{2} (3\sqrt{5} + 5)$$

$$A = 10; 2p = \sqrt{2} (3\sqrt{5} + 5)$$

33. Trova il punto dell'asse x equidistante dai punti A (-3; 1) e B (9; 5).

Se il punto si trova sull'asse x, ha coordinate generiche: $P(x; 0)$ e sfruttando l'equidistanza, cioè: $\overline{AP} \cong \overline{PB}$, o meglio $\overline{AP}^2 \cong \overline{PB}^2$, posso determinare l'ascissa del punto

$$(x+3)^2 + 1 = (x-9)^2 + 25$$

$$x^2 + 6x + 9 + 1 = x^2 - 18x + 81 + 25$$

$$P(4; 0)$$

34. Trova il punto che è equidistante dai punti A (-4; 2), B (0; 6) e che è equidistante dai punti C (6; 6), D (8; 2).

Se il punto da determinare è equidistante da A e B, significa che si trova sull'asse del segmento AB. Allo stesso modo per il punto equidistante da C e D. Determinare il punto significa quindi determinare l'intersezione tra l'asse di AB e l'asse di CD.

$$a_{\overline{AB}}: (x + 4)^2 + (y - 2)^2 = (x - 0)^2 + (y - 6)^2 \qquad x + y - 2 = 0$$

$$a_{\overline{CD}}: (x - 6)^2 + (y - 6)^2 = (x - 8)^2 + (y - 2)^2 \qquad x - 2y + 1 = 0$$

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x + 2 \\ x + 2x - 4 + 1 = 0 \end{cases} \qquad P(1; 1)$$

35. Le rette $x - 2y = 0$ e $2x - y - 3 = 0$ sono i due lati consecutivi di un parallelogrammo. Determina le equazioni degli altri due lati sapendo che il vertice C opposto a quello individuato dalle rette date ha coordinate (5; 4).

Determino le rette passanti per il punto C e parallele alle due rette date:

$$y = \frac{1}{2}x \quad \Rightarrow \quad y - 4 = \frac{1}{2}(x - 5) \qquad x - 2y + 3 = 0$$

$$y = 2x - 3 \quad \Rightarrow \quad y - 4 = 2(x - 5) \qquad 2x - y - 6 = 0$$

36. Date le tre rette di equazione $4x + y + 1 = 0$, $6x - 4y - 15 = 0$, $(2a - 1)x + ay + 3 - 4a = 0$, determina a affinché passino tutte per uno stesso punto.

Determino l'intersezione delle due rette note:

$$\begin{cases} 4x + y + 1 = 0 \\ 6x - 4y - 15 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -3 \end{cases}$$

Impongo il passaggio della terza retta per tale punto, sostituendo le coordinate del punto all'equazione data:

$$(2a - 1) \frac{1}{2} - 3a + 3 - 4a = 0 \qquad a = \frac{5}{12}$$

37. p. 332 N° 160: Siano $O(0; 0)$, $A(2; 4)$ e $B(10; 0)$ i tre vertici consecutivi del parallelogramma $OCBA$; si chiedono le coordinate di C e si verifichi che il parallelogramma è un rettangolo. Determinare poi il quarto vertice E del parallelogramma di diagonale AO e vertici E, O, C, A e verificare che tale parallelogramma è equivalente al rettangolo $OCBA$. (Testo: L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas)

Traccia per la soluzione

Per determinare le coordinate di C :

- determinare il coefficiente angolare di AO
- determinare la retta r passante per B e parallela ad AO
- determinare il coefficiente angolare di AB
- determinare la retta s passante per O e parallela ad AB
- determinare l'intersezione tra le rette r e s : coordinate di C

Per verificare che $OCBA$ è un rettangolo:

- confrontare i coefficienti angolari di AO e AB

Per determinare le coordinate di E :

- determinare il coefficiente angolare di AC
- determinare la retta t passante per O e parallela ad AC
- determinare la retta h passante per A e parallela ad OC (di cui conosco il coeff. angolare perché uguale ad AB)
- determinare l'intersezione tra le rette t e h : coordinate di E

Per valutare l'equivalenza dei quadrilateri $OCBA$ e $EOCA$:

- calcolare l'area di $OCBA$: determinare OC , AO , calcolare l'area che è $OA \cdot OC$
- calcolare l'area di $EOCA$: determinare la distanza di E dalla retta OC , calcolare l'area come $OC \cdot d(E, OC)$ (si può fare la considerazione geometrica che l'altezza del parallelogramma coincide con l'altezza del rettangolo)

38. p. 332 N° 161: Determinare le equazioni dei lati del rombo $ABCD$ avente le diagonali sugli assi cartesiani e il lato AB di vertici $A(0; 4)$ e $B(-8; 0)$. Sia D sull'asse x . Detto H il piede della perpendicolare condotta da B alla retta AD , verificare che il quadrilatero $HBOA$ è inscrittibile in una circonferenza di cui si chiedono centro C' e raggio r . Si calcoli l'area e il perimetro del quadrilatero $HBOA$. (Testo: L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas)

Traccia per la soluzione

Per determinare le equazioni dei lati del rombo $ABCD$:

- il vertice D è simmetrico di B rispetto ad O (vale a dire: O è il punto medio del segmento BD)
- il vertice C è simmetrico di A rispetto ad O (vale a dire: O è il punto medio del segmento AC)
- determino la retta passante per AB
- determino la retta passante per C e parallela alla retta AB
- determino la retta passante per BC
- determino la retta passante per D e parallela alla retta BC

Per determinare il quadrilatero $HBOA$ e verificare che è inscrittibile in una circonferenza:

- determino la retta passante per B e perpendicolare ad AD
- determino l'intersezione tra la retta AD e la sua perpendicolare per B (coordinate di H)
- perché sia inscrittibile in una circonferenza, il quadrilatero $HBOA$ deve avere la somma degli angoli opposti pari a 180° . L'angolo BHA è retto per costruzione, l'angolo BOA è retto, perché gli assi cartesiani sono tra loro perpendicolari, perciò i due angoli opposti hanno somma 180° . Necessariamente anche l'angolo HBO sommato a HAO dà 180° , perché la somma degli angoli di un quadrilatero qualsiasi è pari a 360° .

Centro e raggio della circonferenza, area e perimetro del quadrilatero

- il quadrilatero $HBOA$ è dato da due triangoli rettangoli, con l'ipotenusa in comune. Perciò il centro della circonferenza coincide con il punto medio dell'ipotenusa AB
- il raggio è pari a metà ipotenusa AB
- l'area del quadrilatero è pari all'area di BAH sommata all'area di BOA . Determino i lati BH e AH e l'area di BAH è pari a $BH \cdot AH / 2$. Determino i lati OB e OA e l'area di BOA è pari a $BO \cdot OA / 2$. Sommo le due aree e determino l'area di $HBOA$
- per determinare il perimetro sommo la lunghezza dei lati BO, OA, AH, BH , determinata nel punto precedente.

39. p. 333 N° 166: Detti A e B i punti d'intersezione con gli assi x e y della retta $r: x - 2y + 4 = 0$, determinare i vertici C (appartemente al 2° quadrante) e D dei triangoli isosceli di base AB e area 10. Determinare inoltre:
- l'area del cerchio inscritto nel rombo $ACBD$
 - l'area del cerchio inscritto nel triangolo ABC

(Testo: L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas)

Traccia per la soluzione

Per determinare i vertici C e D :

- determino il coefficiente angolare di AB
- determino il punto medio M di AB
- determino la retta perpendicolare ad AB e passante per M , t
- i punti C e D appartengono alla retta t , perché in un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base coincide con l'asse della base
- determino la lunghezza del segmento AB
- calcolo la misura dell'altezza del triangolo sapendo che $2A : BA = h$, dove A è l'area del triangolo (nota) e h è l'altezza del triangolo (ovvero $CM \cong DM$)
- metto a sistema l'equazione della retta t e la condizione $CM \cong h$

- so che il centro del cerchio inscritto nel rombo $CBDA$ coincide con il punto M , punto d'incontro delle due diagonali, nonché punto medio della diagonale AB .

Determino l'equazione della retta CA

Determino la distanza di M dalla retta CA , che è il raggio r della circonferenza inscritta

Calcolo l'area del cerchio con la formula πr^2

- Determino l'ascissa del centro O' del cerchio inscritto nel triangolo ABC : esso appartiene alla bisettrice dell'angolo in C , che, nel caso del triangolo isoscele, coincide con l'altezza relativa alla base, ovvero con la retta t , già determinata. Inoltre la distanza di O' (di coordinate generiche $(x; y)$) dalla retta AC è congruente alla distanza $O'M$. Pongo a sistema le due

condizioni e determino: $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$, ma quella interna al triangolo ABC ha ascissa $x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$.

Determino la distanza di O' dalla retta BC (mi basta l'ascissa, in quanto la retta è parallela all'asse y)

Tale distanza è il raggio della circonferenza inscritta.

Calcolo l'area del cerchio con la formula πr^2

40. p. 331 N° 154: Verificare che il quadrilatero di vertici $A(1; -1)$, $B(4; 1)$, $C(9/4; 2)$ e $D(3/4; 1)$ è un trapezio isoscele. Detto E il punto d'incontro delle rette AD e BC , verificare che esso appartiene all'asse del segmento AB e determinare l'area del triangolo EDC e l'area del trapezio $ABCD$. (Testo: L. Lamberti, L. Mereu, A. Nanni, *Matematica Uno*, Etas)

Traccia per la soluzione

Verifico che il quadrilatero $ABCD$ è un trapezio isoscele:

- determino il coefficiente angolare di AB
- determino il coefficiente angolare di DC
- verifico che $m_{AB} = m_{DC}$, perciò AB è parallelo a DC , quindi si tratta di un trapezio
- determino la lunghezza di BC e DA e verifico che i due lati sono congruenti, perciò il trapezio è isoscele

Determino E e verifico l'appartenenza all'asse di AB

- determino l'equazione della retta AD
- determino l'equazione della retta BC
- determino E come intersezione delle due rette AD e BC (ovvero metto a sistema)
- determino il punto medio di AB
- determino l'equazione dell'asse a di AB , (retta perpendicolare ad AB e passante per il suo punto medio)
- verifico che $E \in a$, sostituendo le coordinate di E nell'equazione di a

Per calcolare l'area di EDC :

- determino la retta passante per D e con il coefficiente angolare di DC , prima determinato
- calcolo la distanza di E da tale retta
- calcolo la lunghezza di DC
- determino l'area di EDC moltiplicando la lunghezza di DC per la distanza di E da esso, dividendo per 2

Per calcolare l'area di $ABCD$ (uno dei possibili modi)

- determino la retta passante per A e con coefficiente angolare quello della retta AB (già determinato)
- determino la distanza di E da AB
- determino la lunghezza di AB
- calcolo l'area di EAB e le sottraggo l'area di EDC , in questo modo ho l'area di $ABCD$