

51. Dato il fascio di equazione  $(a - 2)x + (1 - 2a)y + 1 = 0$ , determina per quale valore di  $a$  essa è:

- parallela alla retta  $2x - y - 1 = 0$ ;
- perpendicolare alla retta  $3x - y + 1 = 0$ ;
- parallela alla bisettrice del 1° e 3° quadrante;
- parallela alla retta  $x - 2y + 1 = 0$ ;
- passante per l'origine degli assi cartesiani;
- una retta che forma un angolo acuto con il semiasse positivo dell'asse  $x$ .

Innanzitutto metto l'equazione del fascio in forma esplicita:  $y = \frac{2 - a}{1 - 2a}x - \frac{1}{1 - 2a}$ .

- a) Perché sia parallela alla retta  $2x - y - 1 = 0$ , il coefficiente angolare deve essere uguale a 2:

$$\frac{2 - a}{1 - 2a} = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 - a = 2 - 4a \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

Per questo valore di  $a$ , la retta del fascio coincide con la retta data.

- b) Perché sia perpendicolare alla retta  $3x - y + 1 = 0$ , il cui coefficiente angolare è uguale a 3, dovrà avere coefficiente angolare  $-\frac{1}{3}$ :

$$\frac{2 - a}{1 - 2a} = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad 6 - 3a = -1 + 2a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{7}{5}$$

- c) Perché la retta sia parallela alla bisettrice del 1° e 3° quadrante, deve avere i coefficienti di  $x$  e  $y$  opposti:

$$a - 2 = -(1 - 2a) \quad \Rightarrow \quad a - 2 = -1 + 2a \quad \Rightarrow \quad a = -1$$

- d) Perché sia parallela alla retta  $x - 2y + 1 = 0$ , deve avere coefficiente angolare uguale a  $\frac{1}{2}$ :

$$\frac{2 - a}{1 - 2a} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 4 - 2a = 1 - 2a \quad \Rightarrow \quad \text{imp.}$$

- e) Per ottenere la retta passante per l'origine degli assi, sostituisco a  $x$  e  $y$  le coordinate dell'origine:

$$(a - 2) \cdot 0 + (1 - 2a) \cdot 0 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{imp.}$$

- f) Perché una retta formi un angolo acuto con il semiasse positivo dell'asse  $x$ , il coefficiente angolare deve essere positivo:

$$\frac{2 - a}{1 - 2a} > 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} N > 0: a < 2 \\ D > 0: a < \frac{1}{2} \end{array} \quad \Rightarrow \quad a < \frac{1}{2} \vee a > 2$$

52. Determina il valore di  $a$  per il quale le due rette  $x + ay = 5$  e  $2x - 3y = 1$  non hanno intersezioni.

Perché le due rette non abbiano intersezioni devono essere parallele, cioè devono avere lo stesso coefficiente angolare. Scriviamo le due rette in forma esplicita e poniamo i due coefficienti angolari uguali:

$$y = -\frac{1}{a}x + \frac{5}{a} \quad y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \quad -\frac{1}{a} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{3}{2}$$

Questo valore di  $a$  rende le due rette parallele, ma non coincidenti, come è facile verificare.

53. Determina i valori di  $a$  e  $b$  affinché le due rette  $x - 3y - 5 = 0$  e  $ax + by = 10$  abbiano infiniti punti comuni.

Perché due qualsiasi rette  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  e  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$  abbiano infiniti punti comuni, devono coincidere, e cioè si deve verificare che  $a_1 = ka_2$ ,  $b_1 = kb_2$  e  $c_1 = kc_2$ . Possiamo facilmente verificare che, nelle due rette fornite dal testo, i due termini noti sono uno doppio dell'altro, perciò:

$$a = 2 \quad \wedge \quad b = -6$$

54. Nel fascio improprio di rette perpendicolari alla retta di equazione  $5x - 7y + 9 = 0$ , individua quella che taglia l'asse delle ascisse nel punto di ascissa 2.

La retta data ha coefficiente angolare  $\frac{5}{7}$ , perciò il fascio improprio di rette perpendicolari a questa ha equazione:

$$y = -\frac{7}{5}x + q$$

Per determinare quella che taglia l'asse delle ascisse nel punto di ascissa 2, impongo il passaggio per il punto (2; 0), sostituendo le coordinate del punto nell'equazione del fascio:

$$0 = -\frac{7}{5} \cdot 2 + q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{14}{5} \quad \Rightarrow \quad 7x + 5y - 14 = 0$$

55. Scrivi l'equazione di tutte le rette perpendicolari alla retta di equazione  $2x + 5y - 3 = 0$  e tra queste determina quella passante per il punto P (-1; 1).

La retta data ha coefficiente angolare  $-\frac{2}{5}$ , perciò il fascio improprio di rette perpendicolari a questa ha equazione:

$$y = \frac{5}{2}x + q$$

Per determinare quella passante per il punto P, sostituisco le coordinate del punto nell'equazione del fascio:

$$1 = \frac{5}{2} \cdot (-1) + q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad 5x - 2y + 7 = 0$$

56. Scrivi l'equazione del fascio di rette passanti per A (-4; 1).

Considero come rette generatrici quelle parallele agli assi passanti per A, cioè:  $x + 4 = 0$  e  $y - 1 = 0$ .

Il fascio ha equazione:  $a(x + 4) + b(y - 1) = 0$

57. Scrivi l'equazione della retta passante per l'intersezione delle rette  $x - 2y + 5 = 0$  e  $5x + y + 3 = 0$  e parallela alla retta  $3x + y - 1 = 0$ .

Determino innanzi tutto l'intersezione tra le due rette:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y = -5x - 3 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = -5x - 3 \Rightarrow 11x = -11 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Il coefficiente angolare della retta  $3x + y - 1 = 0$  è  $-3$ , perciò impongo il passaggio per il punto determinato della retta con coefficiente angolare  $-3$ :

$$y - y_0 = -3(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -3(x + 1) \Rightarrow 3x + y + 1 = 0$$