

*I matematici sono come i francesi:  
qualsiasi cosa gli dici, loro la traducono subito nel loro linguaggio  
e immediatamente diventa una cosa differente.*  
Johann Wolfgang von Goethe

## DA ARISTOTELE AL COMPUTER

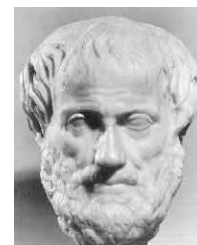
Liberamente tratto da *Le menzogne di Ulisse*, di Piergiorgio Odifreddi

La logica è, per definizione, lo studio del *logos*, cioè del pensiero e del linguaggio, o meglio, del pensiero come esso si esprime attraverso il linguaggio. Perché ci sia logica, quindi, deve esserci linguaggio. Che tipo di linguaggio? Un linguaggio troppo semplice non va bene, perché non ci permette di dire tutto quello che vogliamo: pensiamo all'esempio di un bambino piccolo che, con il suo vocabolario troppo limitato, non riesce ad esprimere i concetti astratti, perciò non riesce a spiegarsi adeguatamente. Ma nemmeno un linguaggio troppo complesso va bene, perché ci impedisce di essere chiari: pensiamo all'esempio di un adulto molto preparato culturalmente, che parla con termini ricercati, ma che, proprio per questo motivo, non si rende comprensibile per le persone più ignoranti. *La logica permette di evitare le trappole in cui si cade quando si usa il linguaggio comune troppo allegramente.*

L'obiettivo della logica è quello di rendere il linguaggio essenziale, ma al tempo stesso chiaro, libero da tutto ciò che è la sovrastruttura inutile, che complica la comunicazione. Non è però l'unico obiettivo e se parliamo di logica oggi il primo pensiero corre all'informatica, tant'è che in varie facoltà si ritrovano gli esami di "logica informatica".

Partendo dal linguaggio *non ci sarebbe logica se il linguaggio non si fosse trovato, a un certo momento, in una situazione di 'crisi' esistenziale, determinata dalla scoperta di un pensiero negativo da affiancare a quello positivo.* Nel distinguere il vero dal falso, nasce la logica e lo scopo del pensiero è quello di indicare la direzione nella quale si deve proseguire. Avevamo lasciato gli insiemi con il paradosso del barbiere di Russell e possiamo ricominciare nella logica con il paradosso del mentitore: partendo da EPIMENIDE, cretese, che affermò "I Cretesi sono bugiardi", fino ad arrivare all'autoreferenzialità di EUBULIDE, che nel IV sec.a.C. affermò: "In questo momento, sto mentendo": una vera contraddizione, perché è vera se falsa ed è falsa se vera.

Nell'antichità, ARISTOTELE fu uno dei più grandi logici. Dopo vent'anni di permanenza nell'Accademia di Platone, non gli successe come avrebbe voluto, a causa di alcuni contrasti e se ne andò da Atene finendo in Macedonia, dove fu precettore di Alessandro Magno, che seguì fino a quando questi, ormai maturo, partì per le sue conquiste. Nel 335 a.C. ritornò ad Atene ed aprì una scuola, il Liceo, considerata la prima scuola superiore della storia dell'umanità. Venne fondato nel ginnasio (il luogo dove i giovani si allenavano per le gare atletiche e si esercitavano nei giochi ginnici e che divenne, con il tempo, il luogo per il ritrovo e l'educazione) dedicato ad Apollo Licio e per questo motivo venne chiamato Liceo. Si tramanda che Aristotele usasse insegnare passeggiando per trasmettere ai suoi discepoli l'amore per la natura e da ciò nacque il nome di Peripato, per il Liceo. Al Liceo si tenevano corsi regolari: al mattino le lezioni erano di livello normale, al pomeriggio erano rivolti a pochissime persone e di un livello molto elevato. Aristotele fungeva da rettore di questa scuola e i suoi allievi più brillanti diventavano i direttori dei singoli dipartimenti. Nei primi anni all'Accademia Aristotele si servì dei dialoghi nella redazione delle sue opere "essoteriche", cioè destinate alla circolazione pubblica, e di queste ci sono pervenuti solo qualche titolo e alcuni frammenti. Mentre ci sono pervenuti gli scritti "esoterici" dei quali si serviva nelle sue lezioni del pomeriggio. Le sue opere furono raccolte, nel I sec.a.C. da Andronico di Rodi, in un'edizione che presenta l'ordine noto fino a oggi. Gli scritti di logica sono contenuti sostanzialmente in due opere: nella *Metafisica* e nell'*Organon* "Strumento", così chiamato perché per Aristotele la logica era appunto lo strumento per lo studio delle scienze e non una scienza essa stessa. Aristotele riservava la qualifica di "logica" agli argomenti corretti che partivano da ipotesi vere, mentre parlava di "dialettica" se le ipotesi erano solo verosimili e di "sofistica" se i ragionamenti erano invece scorretti. Nella *Metafisica* parla delle leggi dell'essere: il principio di non contraddizione, già individuato da Platone, e il principio del terzo escluso (*tertium non datur*), secondo il quale una cosa non può essere e contemporaneamente non essere.



La logica di Aristotele divenne "classica" e non fu messa in discussione fino al Novecento, quando si trovarono altre vie intermedie. Fino ad allora il pensiero fu ridotto al dualismo vero/falso, avendo Aristotele rimosso la possibilità di strutture più complesse, coinvolgenti relazioni fra più soggetti.

Aristotele era in ogni caso ben avanti sui tempi:

⇒ enuncia il principio di indiscernibilità degli identici (cose uguali godono delle stesse proprietà e sono intercambiabili) e il principio di identità degli indiscernibili (cose che godono delle stesse proprietà o che sono intercambiabili sono uguali).

- ⇒ nell'Ermeneutica parla dei connettivi, tracciando un parallelo tra il ruolo di intermediazione svolto da Ermete<sup>1</sup> fra gli dei e gli uomini e quello svolto da questi termini (i connettivi) tra le proposizioni. I connettivi sui quali si concentra Aristotele sono di due tipi: quello dei quantificatori, ovvero termini del linguaggio che indicano una quantità e quello delle modalità, cioè i termini "necessario", "possibile", "impossibile", "contingente".
- ⇒ enuncia la teoria dei sillogismi: ne trova 24 validi e li divide in vari gruppi, a seconda delle regole usate per convertire gli uni negli altri, ottenendo un teorema di classificazione.

*E fu con questi risultati che la logica giunse a completa maturità matematica, superando finalmente i suoi infantili e paradossali vagiti metafisici.*

Zenone di Cizio fonda, verso il 300 a.C., la scuola della "prima Stoà"<sup>2</sup> ad Atene e l'esponente più importante di questa scuola fu il suo terzo rettore, il fenicio CRISIPPO DI SOLI. La logica stoica emerge come una conquista intellettuale di prim'ordine, ma è difficile ricostruirne la storia: non si conoscono i contributi individuali ed è difficile riconoscerne le influenze megariche. Crisippo definì i connettivi, isolò le regole del ragionamento e gli assiomi fondamentali, ma diede anche un importante contributo alla matematica, considerando l'1 come numero. Fra le regole di ragionamento distinsero:

- Negazione: "non"
- Congiunzione: "e"
- Disgiunzione: "o"
- Implicazione: "se... allora"

Isolarono cinque assiomi, dai quali pensavano che si potessero dedurre tutti i possibili teoremi. Tra gli assiomi ricordiamo il *modus ponens* e il *modus tollens*, i principi fondamentali del ragionamento: nel primo caso, posta l'ipotesi, si pone automaticamente anche la tesi; nel secondo caso, tolta la tesi, si toglie automaticamente anche l'ipotesi; tra i teoremi ricordiamo la *reductio ad absurdum*<sup>3</sup> e la *consequentia mirabilis*<sup>4</sup>.

La logica di Crisippo e quella di Aristotele, i massimi logici dell'antichità (a pari merito) furono considerate per lungo tempo in antitesi, mentre in realtà costituiscono due visioni complementari nate dalla tradizione socratica, anche se per gli stoici la logica è una scienza autonoma, mentre per Aristotele è propedeutica alle scienze.

Per ricominciare a parlare di logica, dobbiamo aspettare il IX secolo, con la filosofia scolastica, ovvero la filosofia della religione cristiana medioevale. Infatti, il carattere fondamentale della filosofia scolastica è l'uso della ragione al servizio della verità di fede: il compito dei filosofi era quello di contrastare le tesi eretiche e di convertire gli atei. Lo studio, per come era strutturato, richiedeva una grande abilità dialettica e logica. Anselmo d'Aosta propose la prova ontologica dell'esistenza di Dio, Abelardo si interessò della questione degli universali, ma il più grande esponente fu Guglielmo Di Occam. Tommaso d'Aquino enunciò cinque prove dell'esistenza di Dio e Pietro Hispano introdusse una nomenclatura, basata sulle vocali A, E, I, O (tratte da Adfirmo e nEgO), identificando ogni sillogismo con tre vocali. In tal caso: A = tutti, E = nessuno, I = qualcuno, O = non tutti.

La scolastica ha spinto l'analisi del pensiero fin dove poteva arrivare attraverso il linguaggio naturale: per proseguire era necessario sviluppare uno specifico linguaggio artificiale, tagliato su misura per i suoi bisogni.

Nel 1274 RAIMONDO LULLO (1235-1315) abbozzò un'idea che solo nel Novecento dimostrerà tutta la sua potenza: scomporre le nozioni linguistiche fino ad arrivare alle componenti semplici, per poi assegnare a queste dei numeri e ricomporre i numeri in maniera inversa alla scomposizione delle nozioni. In linea di principio, diventava possibile tradurre il linguaggio naturale in quello dei numeri, riflettendo la struttura grammaticale nella struttura aritmetica. Lullo credeva che la realizzazione del progetto avrebbe fornito un aiuto per la conversione degli infedeli.

Può essere considerato il primo realizzatore di un computer, visto che progettò un meccanismo a ruote concentriche sulle quali stavano scritti i termini semplici: girando le ruote, si potevano ottenere automaticamente tutte le combinazioni che corrispondevano alle "verità" del sistema. Per Lullo la logica era *scientia scientiarum* e questa sua concezione sarà ripresa e sviluppata solo in tempi moderni.

A lui si ispirò GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ (1646-1716), come dice nel 1666 nell'*Ars combinatoria*. In quest'opera Leibniz riduce il pensiero all'aritmetica, assegnando numeri alle nozioni semplici e prodotti alle nozioni composte. Fra le cose cui diede inizio Leibniz c'è l'abbozzo dell'aritmetica binaria che permette di scrivere tutti numeri

<sup>1</sup> Ermete, chiamato dai Latini Mercurio, era figlio di Zeus e di Maia. Pur essendo in un certo senso un dio minore era essenziale per la vita nell'Olimpo: Zeus lo nominò messaggero degli dei, ed affinché potesse svolgere la sua mansione con maggior rapidità gli furono donati dei sandali alati, un cappelluccio, ed un bastone d'oro chiamato caduceo affinché tutti lo potessero riconoscere. Ermete era messaggero anche per gli altri dei, particolarmente per Ade: era Ermete a condurre i morti nel mondo sotterraneo, dopo aver posato sui loro occhi il caduceo; in questa sua veste assumeva il nome di Psicopompo, ovvero accompagnatore delle anime. Il termine "ermeneutica" deriva da Ermete e significa, "interpretazione".

<sup>2</sup> Lo stoicismo è una corrente filosofica e spirituale i cui esponenti sostennero le virtù dell'autocontrollo e del distacco dalle cose terrene (atarassia): il dominio delle passioni permette allo spirito il raggiungimento della saggezza. Tra gli stoici più importanti: Seneca, Catone e l'imperatore Marco Aurelio.

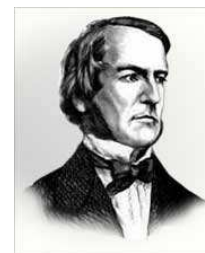
<sup>3</sup> deduce la negazione di una proposizione dal fatto che la proposizione stessa porti a una contraddizione

<sup>4</sup> permette di affermare una proposizione sulla base del fatto che essa si può dedurre dalla sua stessa negazione

con due sole cifre, lo 0 e l'1, e che oggi costituisce il linguaggio ufficiale dell'informatica<sup>5</sup>. Leibniz voleva rendere automatico un processo mentale, facendo nella logica ciò che era già stato fatto nella matematica. Verso il 1686 trovò un algoritmo pratico per la verifica automatica dei sillogismi: il metodo è conosciuto ora come diagramma di Eulero-Venn<sup>6</sup>.

*Quando sorgeranno delle controversie, non ci sarà maggior bisogno di discussione tra due filosofi di quanto ce ne sia fra due calcolatori. Sarà sufficiente, infatti, che essi prendano la penna in mano, si siedano a tavolino, e si dicano reciprocamente (chiamando, se vogliono, a testimone un amico): Calculemus, «calcoliamo».*

Il primo a carpire il vero segreto del calcolo binario fu GEORGE BOOLE (1815-1864), un modesto professore, il *primo protagonista normale della nostra storia*. Fece uscire la logica dal campo della filosofia e la fece entrare nel campo delle scienze. Avviato a studi commerciali, imparò da solo le lingue più disparate, dal greco all'italiano, ma anche la matematica. Fu influenzato da contatti occasionali: Duncan Gregory, algebrista di Cambridge che fu il fautore di uno sviluppo formale della sua disciplina e AUGUSTUS DE MORGAN, un logico di Londra, che tentava di sviluppare il trattamento matematico dei sillogismi abbozzato da Leibniz.



L'atto di nascita della "logica matematica" è *L'analisi matematica della logica*, pubblicata da Boole nel 1847: in esso fu per la prima volta effettuata una riformulazione algebrica della logica sillogistica di Aristotele e di quella proposizionale di Crisippo. *Le stesse leggi che descrivevano la sillogistica descrivevano anche la logica proposizionale, esibendo così la nascosta complementarità dei due approcci, peripatetico e stoico.*

L'idea di Boole si presta a essere divulgata, perché estremamente semplice.

- negazione: "non":  $1 - 1 = 0$  (il vero diventa falso) e  $1 - 0 = 1$  (il falso diventa vero)
- congiunzione: "e":  $1 \times 1 = 1$ , la congiunzione di due proposizioni è vera solo se entrambe sono vere, falsa se almeno una delle due è falsa,  $1 \times 0 = 0$ ,  $0 \times 1 = 0$ ,  $0 \times 0 = 0$
- disgiunzione: "o":  $0 + 0 = 0$ , la disgiunzione di due proposizioni è falsa solo se entrambe sono false, vera se almeno una delle due proposizioni è vera,  $1 + 0 = 1$ ,  $0 + 1 = 1$ ,  $1 + 1 = 1$

In altre parole, *le complesse problematiche della logica proposizionale vengono imbarazzantemente ridotte a un semplice calcolo scolastico*. Con l'analisi di Boole si raggiungono due importanti risultati: da un lato, si realizza il sogno di Leibniz di ridurre il ragionamento al calcolo, dall'altro, con un solo calcolo si unificano la logica proposizionale di Crisippo e quella sillogistica di Aristotele, fino a questo momento considerate in antitesi. Il limite di questo approccio è però proprio nel fatto che non si va oltre la logica aristotelica.

Boole considerava come regola fondamentale la legge di idempotenza, che in simboli si scrive  $x^2 = x$ , e che in pratica ci dice che ripetere due volte la stessa cosa è come dirla una volta sola. Inoltre, spostando tutti i termini a primo membro e scomponendo si ottiene:  $x^2 - x = 0$ , ovvero  $x(x - 1) = 0$ , ricavando così la forma algebrica del principio di non contraddizione. La forma algebrica del principio del terzo escluso è invece  $x + (1 - x) = 1$ : in ogni momento bisogna affermare o negare la stessa proposizione, ma non si possono fare entrambe le cose contemporaneamente.

La formulazione di Boole ebbe anche altre importanti ricadute:

- la teoria della probabilità si può trattare con le stesse leggi della logica, dove 1 rappresenta l'evento necessario e 0 l'evento impossibile;
- 1938: l'ingegnere Claude Shannon, inventore della teoria dell'informazione, traduce ogni cosa in termini di circuiti elettrici o elettronici. 1 e 0 segnalano il passaggio o no della corrente elettrica in un filo, oppure lo stato acceso o spento di una lampadina o di una valvola;
- 1943: il neurofisiologo Warren McCulloch e il matematico Walter Pitts scoprono che un'ulteriore interpretazione dell'algebra booleana è data dai circuiti neurali, l'algebra di Boole fornisce un modello approssimativo del sistema nervoso.

*Dopo il terremoto prodotto da Boole la logica ha quindi cessato di essere un'occupazione per soli filosofi, psicologi e linguisti, com'era stata fino a metà Ottocento e ha invaso gli istituti e le facoltà di matematica, di informatica, di ingegneria e di scienze cognitive, dov'è diventata uno strumento essenziale per lo studio non soltanto del pensiero e del linguaggio, ma anche dell'algebra, dei calcolatori, dei circuiti e del cervello, realizzando quella caratteristica universalis che Leibniz aveva solo potuto sognare.*

<sup>5</sup> Leibniz vi vide un'immagine della creazione di ogni cosa a partire dal nulla (0) e da Dio (1) e fece avere questo suo risultato in una lettera a Padre Joachim Bouvet, missionario gesuita in Cina, il quale, nel 1701, gli fece notare che se si sostituiscono lo 0 e l'1 alle linee spezzate o intere degli esagrammi degli I Ching, si ottiene appunto l'aritmetica binaria.

<sup>6</sup> Leibniz non pubblicò i suoi diagrammi, che vennero divulgati da Eulero e riscoperti una terza volta da Venn.

Purtroppo, Boole non fu altrettanto fortunato durante la sua vita: nel 1849, grazie ai risultati raggiunti, ottenne una cattedra al Queen's College di Cork, che tenne fino alla morte, avvenuta prematuramente nel 1864, a soli quarantanove anni:

*Un giorno di pioggia, infatti, camminò per tre chilometri fino a scuola sotto l'acqua, e fece lezione bagnato fradicio. La moglie, che era nipote di quel Sir George Everest dal quale prende il nome il monte, non doveva però essere una cima: credendo che le malattie andassero curate nello stesso modo in cui erano state contratte, gli diede il colpo di grazia tirando secchiate d'acqua gelata sul letto.*



Nel 1900, dal 14 aprile al 10 novembre, si tenne a Parigi l'Esposizione Universale, che superò la quota di 50 milioni di visitatori (solo quella di Osaka del 1970 fece altrettanto). Molti monumenti parigini furono costruiti per l'esposizione, inclusi la Gare de Lyon, la Gare d'Orsay (ora Museo d'Orsay), il Ponte Alessandro III, il Grand Palais, La Ruche e il Petit Palais. L'esposizione parigina vide anche il trionfo del cinematografo dei fratelli Lumière. Nello stesso anno Parigi ospitò anche la II Olimpiade dell'era moderna e, ad agosto, il Congresso Internazionale di Matematica, seconda occasione ufficiale (la precedente a Zurigo tre anni prima) in cui i matematici di tutto il mondo si riuniscono. Il primo discorso di apertura, nel

1897, fu affidato a Henri Poincaré, questo fu affidato a DAVID HILBERT (1862-1943). Egli arrivò con un paio di giorni di ritardo e tenne il suo discorso l'8 agosto:

*Chi di noi non sarebbe felice di sollevare il velo dietro cui si nasconde il futuro; di gettare uno sguardo ai prossimi sviluppi della nostra scienza e ai segreti del suo sviluppo nei secoli a venire? Quali saranno le mete verso cui tenderà lo spirito delle future generazioni di matematici? Quali metodi, quali fatti nuovi schiuderà il nuovo secolo nel vasto e ricco campo del pensiero matematico?*

Nel suo discorso, Hilbert presentò 9 problemi che egli riteneva fondamentali per lo sviluppo della matematica del Novecento. (I problemi erano in totale 23: gli altri vennero pubblicati negli atti del Congresso. Alcuni di questi problemi vennero risolti di lì a breve, altri sono stati ampiamente dibattuti durante l'intero XX secolo, solo uno non è ancora stato risolto ed è l'*Ipotesi di Riemann*<sup>7</sup>.) L'obiettivo di Hilbert era di costruire una teoria matematica in modo completamente formalizzato, ossia con degli assiomi alla base e a partire da un linguaggio simbolico adeguato. A questo punto si può costruire la *metateoria*<sup>8</sup> matematica: l'idea originale di Hilbert era di arrivare a trattare la metateoria con metodi assolutamente elementari, al di là di ogni dubbio e con metodi di questo tipo arrivare anche a provare la non contraddittorietà della teoria.

Verso il 1930 era plausibile pensare che fosse imminente una prova della non contraddittorietà di tutta la matematica.

Precedentemente, GOTTLIEB FREGE (1848-1925), matematico, logico e filosofo tedesco, padre del pensiero formale del Novecento, lavorò al logicismo, ovvero della corrente filosofica secondo la quale si poteva ridurre la matematica alla logica. Era un programma ambizioso, *per non dire megalomane*, che Frege cercò di sviluppare seguendo varie tappe. La prima tappa fu, nel 1879, il *Begriffsschrift* (=Ideografia), che proponeva “*un linguaggio in formule del pensiero puro, a imitazione di quello aritmetico*”. Purtroppo, il simbolismo scelto da Frege non facilitava la comprensione e il libro, pubblicato a sue spese, non ricevette attenzione. Il simbolismo utilizzato al giorno d'oggi è quello sviluppato da Peano e divulgato da Russell.

Ma Frege estese la logica di Aristotele, sviluppando un sistema di assiomi e regole per la logica predicativa. I tempi erano maturi e già De Morgan nel 1864, Peirce nel 1870 e Schröder nel 1895 avevano compiuto molti passi. Fu però solo Frege, completamente isolato dal resto del mondo, a compiere un vero e proprio salto di qualità.

Nei libri seguenti, Frege cerca di ricostruire la teoria degli insiemi di Cantor in maniera logica e poi l'aritmetica in maniera insiemistica, in modo da fondare tutto l'impianto della matematica sulla logica. Per realizzare questo suo progetto, Frege scelse due principi già usati da Aristotele: l'identità degli indiscernibili e la comprensione. Ma proprio la comprensione fece crollare il suo lavoro, come già detto a proposito della teoria degli insiemi, con quello che divenne noto come paradosso di Russell, riformulato come paradosso del barbiere.

<sup>7</sup> Essa fu formulata la prima volta dal matematico Bernhard Riemann, nel 1859. La sua dimostrazione risulta tuttora uno dei principali problemi aperti della matematica e figura nella lista dei sette *Millennium Problems*, per la soluzione di ciascuno dei quali il Clay Mathematics Institute ha offerto un premio da un milione di dollari.

<sup>8</sup> Data una teoria, tutte le questioni di dimostrabilità e simili (quindi anche quella della sua coerenza) fanno parte della metateoria. (Speranza)



Mentre Russell era un vero personaggio<sup>9</sup>, Frege, suo *alter ego logico*, è l'opposto ideologico: antidemocratico, antiliberalista, antisocialista, antisemita. Come dice Odifreddi, questo *dimostra che la logica matematica certo aiuta a ragionare con chiarezza, ma forse non insegna a vivere con decenza*.

Equivalente all'approccio di Russell fu quello di LUDWIG WITTGENSTEIN (1889-1951): scrisse un solo libro, il *Tractatus logico-philosophicus*, con il quale era convinto di aver risolto definitivamente "tutti" i problemi della filosofia. Per questo abbandonò l'attività diretta: dopo cinque anni di guerra, durante i quali vide la luce la stesura finale del *Tractatus*, fu insegnante in una scuola elementare (dove venne processato per aver picchiato a sangue un'alunna), giardiniere in un monastero e, infine, architetto per la costruzione della nuova casa della sorella a Vienna. *Il motto del libro era «Ciò che si sa si può dire in tre parole», e l'intero argomento si sviluppava in sole sette frasi commentate*. Nel 1929, convintosi che non era stato risolto proprio tutto, tornò a Cambridge.

Il testimone della logica passa ora nelle mani di Gödel e Turing, che dimostrarono che il programma di Hilbert era irrealizzabile: non è possibile fondare la matematica in modo tale che la sua consistenza non possa essere messa in dubbio.



<sup>10</sup>KURT GÖDEL (1906-1978), considerato il più grande logico del XX secolo, ha pubblicato il suo più famoso risultato nel 1931 all'età di soli 25 anni, nel periodo in cui lavorava presso l'Università di Vienna. Questo lavoro è considerato il contributo più importante che la logica matematica abbia mai ricevuto. Nel 1928 aveva risolto il secondo problema di Hilbert<sup>11</sup>, a ventitre anni, nella sua tesi di laurea: il teorema di completezza per la logica predicativa. Una volta dimostrata la completezza della logica, non restava che estendere il risultato alla matematica: Gödel si dedicò a questo compito, nella sua tesi di dottorato del 1931, ma scoprì che c'erano formule dell'aritmetica che non erano teoremi dei

*Principia*. Gödel diede il primo annuncio ufficiale del suo teorema il 7 settembre 1930 a Königsberg, in occasione del convegno in onore di Hilbert, dicendo che nel sistema ci sono formule che non sono né dimostrabili, né refutabili. Esse costituiscono affermazioni che rimangono perennemente indecise. Il suo teorema è la tipica espressione culturale del Novecento ed è uno dei pochi risultati matematici ad essere citato in un brano musicale<sup>12</sup>, una poesia<sup>13</sup>, un film<sup>14</sup>.

I teoremi di incompletezza dimostrano così che la matematica non è riducibile alla logica: la prima, infatti, è incompleta, al contrario della seconda. Perciò, una delle conseguenze filosofiche dei teoremi di Gödel fu la dimostrazione definitiva che il sogno di Frege e Russell era irrealizzabile. Distrusse pure il programma di Hilbert sulla consistenza, in quanto *nessun sistema matematico consistente e avente una minima capacità espressiva può dimostrare la propria consistenza*.

Come Gauss, Gödel ha pubblicato *col contagocce* e ha tenuto *nel cassetto risultati che avrebbero inorgoglito chiunque altro*. Come Archimede, non *credè la propria disciplina*, ma la cambiò *per sempre con i propri risultati, riuscendo a raggiungere profondità apparentemente insondabili*.

Purtroppo, già fin da piccolo, Gödel aveva lasciato sospettare qualche problema mentale. Da una febbre reumatica, guarita secondo i medici, ma non secondo lui, gli restarono l'ipocondria e la sfiducia verso i medici, oltre a una certa fragilità mentale, che lo portò a essere più volte internato in ospedali psichiatrici, a partire dagli anni '30. Fortunatamente, il matrimonio con una ballerina divorziata, più vecchia di lui, (matrimonio osteggiato dai genitori, infatti poté sposarla solo nel 1938, nonostante se ne fosse innamorato da studente) *costituì un fattore di stabilità emotiva, e quand'ella fu ricoverata, negli anni '70, la depressione e la paranoia di Gödel ebbero via libera. Messosi in testa che lo volevano avvelenare, morì a settantadue anni, nel 1978, di «malnutrizione causata da disturbi della personalità»*.

Il nostro percorso si conclude con i contributi di ALAN MATHISON TURING (1912-1954). Pochi sanno che la Seconda Guerra Mondiale fu vinta anche grazie ai deciflatori di codici:

*riuscirono regolarmente ad avere la meglio sui sistemi di comunicazione tedeschi, giapponesi e italiani. Innumerevoli attacchi nemici furono disinnescati o contenuti, e*

<sup>9</sup> esponente del pacifismo, si oppose alla partecipazione dell'Inghilterra alla Prima Guerra Mondiale e per questo fu prima allontanato dall'Università di Cambridge e poi incarcerato per sei mesi, divenne insieme ad Einstein un sostenitore del disarmo nucleare e nel 1961 fu incarcerato per una settimana per la sua condanna del proliferare delle armi nucleari, si schierò infine anche contro l'intervento degli Stati Uniti in Vietnam

<sup>10</sup> Curiosità: era talmente curioso, che da bambino i genitori e i parenti lo chiamavano *Herr Warum*, il Signor Perché

<sup>11</sup> Si può dimostrare che l'insieme degli assiomi dell'aritmetica è consistente? La risposta di Gödel è stata un NO.

<sup>12</sup> Hans Werner Henze, compositore di avanguardia, ha utilizzato il poema di Enzensberger nel suo *Secondo Concerto per Violino*, del 1971. Secondo la partitura il violino solista entra in scena frettolosamente, indossando un tricorno piumato ed una cappa da opera che può togliersi per suonare. A tempo debito, egli recita l'enunciato del teorema di Gödel al microfono; il resto del poema, opportunamente trattato elettronicamente, deve essere trasmesso da un registratore; gli ultimi versi sono però recitati dal vivo, da una voce fra il pubblico. Al momento di uscire di scena il violino reindossa tricorno e cappa ed abbandona frettolosamente il palcoscenico.

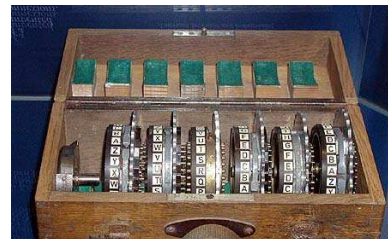
<sup>13</sup> *Omaggio a Gödel* di Hans Magnus Enzensberger

<sup>14</sup> *Enigma*, di Michael Apted, genere spionaggio, Aprile 2002/Genio per amore, di Fred Schepisi, 1994

*altrettanti attacchi alleati poterono andare a segno, grazie alla conoscenza preventiva della consistenza, della dislocazione e dei piani delle truppe nemiche. Si calcola che senza questi vantaggi, soprattutto nella battaglia dell'Atlantico e nello sbarco in Normandia, la guerra avrebbe potuto trascinarsi fino al 1948.*

Anche Turing partecipò alla decrittazione di Enigma, ideando nuove e più efficienti bombe crittologiche così che l'Enigma fu sistematicamente forzata. Nel 1942 si arrivò a decrittare più di 80.000 messaggi cifrati tedeschi al mese!

Nella tesi di laurea, Turing aveva progettato quello che oggi chiamiamo computer, ma dovette aspettare la fine della seconda guerra mondiale per giungere ad una sua realizzazione pratica. *I dati di entrata e di uscita si codificano come se fossero numeri binari; le istruzioni, come se fossero regole di un sistema matematico; i programmi, come se fossero sistemi di regole; e i calcoli, come se fossero dimostrazioni. In altre parole, si scopre che i sistemi*



*matematici e i programmi informatici sono due aspetti di una stessa realtà algoritmica.* E le tecniche per la progettazione di un computer sono le stesse usate da Gödel per i suoi teoremi di incompletezza.

Nel 1945 nacquero due progetti per calcolatori elettronici programmabili: l'EDVAC di von Neumann negli Stati Uniti e l'ACE di Turing in Inghilterra. Gli Stati Uniti si buttarono a capofitto sul loro progetto, mentre l'Inghilterra preferì finanziare progetti meno ambiziosi. Turing introdusse una serie di innovazioni oggi universalmente adottate, ma non riuscì a realizzare il suo vero sogno. Sfruttò l'analogia tra sistemi matematici e programmi informatici e tradusse la formula non dimostrabile di Gödel in un'operazione non calcolabile, il cosiddetto problema della fermata. Una volta trovato un problema indecidibile, a Turing bastò tradurlo nel linguaggio della logica per decidere negativamente il problema della decisione per la logica: insieme ad ALONZO CHURCH (1903-1995), che partì da premesse diverse e usò un problema diverso, scoprirono l'indecidibilità della logica. Dopo l'incompletezza della matematica, grazie a Gödel, ora c'era anche l'indecidibilità della logica: *non esistono algoritmi in grado di decidere se una formula è un teorema o no. Per la logica proposizionale o sillogistica esistono algoritmi che permettono, attraverso la verifica di un calculemus, di decidere la validità di una formula; ma per la logica predicativa e la matematica la cosa non è possibile, e la decisione deve far ricorso ai metodi non algoritmici dell'intuizione e della scoperta.*

Ed era anche quanto aveva già dichiarato Poincaré, sostenendo che era impossibile sostituire la libera iniziativa, la creatività del matematico: *La macchina si lascerà sempre sfuggire l'anima del fatto.*

Turing era consapevole di questo, ma voleva stabilire fino a che punto il computer potesse effettivamente "pensare": fu infatti il *primo profeta* dell'Intelligenza Artificiale.

Il colpo di grazia definitivo venne dato da ALFRED TARSKI (1902-1983), che nel 1936 dimostrò l'ultimo dei grandi teoremi di limitatezza, quello dell'indeterminabilità della verità. In altre parole, un sistema non può definire la propria verità, che può essere definita solo all'esterno.

*[Turing] non vide [gli] sviluppi [del suo lavoro], perché la sua pulsione omosessuale lo portò un giorno a raccogliere un ragazzo di via per la strada e a portarselo a casa. Quando la mattina si svegliò, il ragazzo era scomparso, insieme a qualche soprammobile: Turing denunciò la cosa alla polizia, e rispose troppo sinceramente a qualche domanda. Poiché il reato di omosessualità era perseguibile d'ufficio, fu processato per atti osceni e condannato. Grazie ai suoi meriti di guerra, gli permisero di scegliere fra la prigione e una cura di estrogeni per guarire la sua «malattia»: preferì quest'ultima, ma la cura lo rese impotente e gli fece crescere il seno. Nel 1954, a quarantadue anni, il padre dell'informatica moderna si suicidò mangiando una mela avvelenata, per far credere alla madre che si fosse trattato di un incidente.*

## BIBLIOGRAFIA

AA.VV., *Logica matematica e logica filosofica*, Editrice La scuola, Brescia 1990

Enzensberger Hans Magnus, *Gli elisir della scienza*, Einaudi, Torino 2004

N. Doderò, P. Barboncini, R. Manfredi, *Nuovi lineamenti di matematica*, Ghisetti e Corvi Editori, Milano 2006, vol. 1

Odifreddi Piergiorgio, *Le menzogne di Ulisse*, Longanesi, Milano 2004

Francesco Speranza, *Matematica per gli insegnanti di matematica*, Zanichelli, Bologna, 1983

Wikipedia, l'enciclopedia libera [http://it.wikipedia.org/wiki/Pagina\\_principale](http://it.wikipedia.org/wiki/Pagina_principale) (ho fatto riferimento a questa enciclopedia per le date di nascita e di morte dei singoli logici citati e per alcune notizie riguardo la loro vita)