Algebra e aritmetica nel Medioevo islamico

Tratto dall'articolo di Clara Silvia Roero
in "Un ponte sul Mediterraneo"
pubblicato da Il Giardino di Archimede

Grecia (II sec. a.C.)
Biblioteca di Alessandria (III sec. d.C.)
Impero Romano (476 d.C.)

India

Trattazioni sulla geometria piana e solida, sulle coniche, sui fondamenti logici e filosofici delle scienze

Conoscenze di aritmetica e astronomia, sistema di numerazione posizionale e introduzione dello zero

ARABI

Traduzioni spagnole e portoghesi
Papa Silvestro II
Fibonacci

RINASCIMENTO

622

945

VII / VIII secolo
Matematica = problemi pratici

EPOCA D'ORO

Dinastia degli ABBASIDI

IX / XII secolo
straordinaria fioritura

Assimilazione
+
Originalità

ABBASIDI
Ja'far al-Mansūr (regna 754/775)
Hārūn al-Rashīd (regna 786/809)
'Abdallāh al-Ma'mūn (regna 813/833)

GRECIA

BAGHDAD
la città della pace

INDIA

Baghdad: nuova capitale della cultura

A Baghdad c'è la CASA DEL SAPERE
Fondata verso l'830 da al-Ma'mūn

Il califfo Hārūn ospita a Baghdad gli intellettuali, transfughi dall'oriente e dall'occidente, e incoraggia l'opera dei traduttori e la raccolta di trattati greci e indiani che arricchiscano le biblioteche.

I califfi abbasidi affidavano l'educazione dei loro figli a eruditi, scienziati, poeti e musicisti, persuasi del detto popolare che "**istruire l'infanzia è scolpire nella pietra**". "Il principe dei credenti ti affida il suo sangue più prezioso, il frutto del suo cuore. [...] Sii all'altezza del compito che il califfo ti ha assegnato: insegna al tuo allievo il Corano, fagli conoscere le tradizioni; **orna** la sua memoria con le poesie classiche; istruiscilo nelle nostre sacre usanze. [...] **Non lasciar passare un'ora della giornata senza trarne profitto per la sua educazione**. Non essere né tanto severo da mortificare la sua intelligenza, né tanto indulgente da far sì che si abbandoni alla pigrizia e ci si abitui".

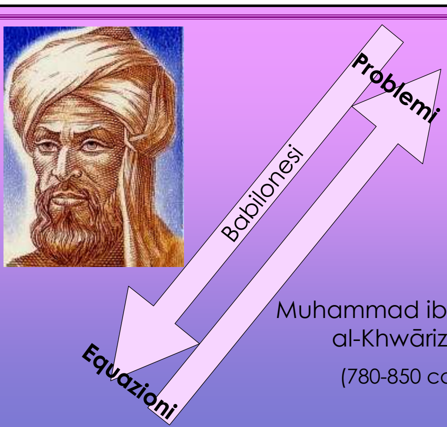
Gli astronomi arabi si accorgono della propria carenza di conoscenze in ambito matematico:

Traducono gli Elementi di Euclide

Traduzione in siriaco

Traduzioni ricche di elementi originali: loro scopo non era quello di essere fedeli all'originale, ma di diffondere le conoscenze, arricchendole di commenti

---



Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī

(780-850 ca.)

Termini delle equazioni

Dirham: indica i numeri, probabilmente dal nome dell'unità monetaria greca dracma — *res*

Shay: (letteralmente *cosa*) o *jidhr* (*radice*), dal termine arabo per la radice di una pianta, indica l'incognita — *radix*

Māl denota il quadrato dell'incognita (da *bene, possedimento*). — *census*

Tipi di equazioni

I quadrati sono uguali alle radici — $ax^2 = bx$

I quadrati sono uguali a un numero — $ax^2 = c$

Le radici sono uguali a un numero — $ax = c$

I quadrati e le radici sono uguali a un numero — $ax^2 + bx = c$

I quadrati e i numeri sono uguali alle radici — $ax^2 + c = bx$

Le radici e i numeri sono uguali ai quadrati — $bx + c = ax^2$

Tipi di operazioni

$$x^2 + (10 - x)^2 = 58$$

$$2x^2 + 100 - 20x = 58$$

$$2x^2 + 100 = 20x + 58$$

l'***al-jabr*** (letteralmente: *completamento, riempimento*; in latino *restauratio*), che corrisponde ad eliminare i termini negativi, aggiungendo termini uguali nei due membri

primo principio di equivalenza

Tipi di operazioni

$$2x^2 + 100 = 20x + 58$$

$$2x^2 + 42 = 20x$$

l'***al-muqābala*** (letteralmente: *messa in opposizione, bilanciamento;* in latino *oppositio*), che consente di addizionare i termini simili nei due membri

Tipi di operazioni

$$2x^2 + 42 = 20x$$

$$x^2 + 21 = 10x$$

l'***al-hatt***, che corrisponde al ridurre all'unità il coefficiente del termine di secondo grado

secondo principio di equivalenza

I limiti delle equazioni

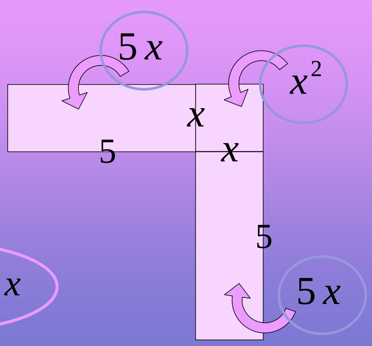
- La soluzione x = 0 viene sempre esclusa
- I coefficienti devono sempre essere positivi
- Le soluzioni sono sempre positive
- Esigenza di rispettare l'omogeneità dimensionale
- Scarso utilizzo degli irrazionali (*jidhr'asamm* = radice sorda)

Innovazioni

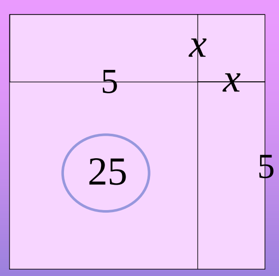
- Al-Khwārizmī studia l'equazione come oggetto matematico in sé, curandone la classificazione, il metodo risolutivo e la discussione
- Fa seguire la dimostrazione geometrica alla soluzione delle singole equazioni (parecchie analogie con Euclide)

Via geometrica

$$x^2 + 10x = 39$$



$$x^2 + 10x$$



$$x^2 + 10x + 25$$

$$x^2 + px = q$$

$$x^2 + 10x = 39$$

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

$$x^2 + 2 \cdot \left(\frac{p}{2}x\right) + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$(x+5)^2 = 64$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

$$x + 5 = 8$$

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

$$x = 3$$

$$x = \sqrt{q + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}$$

Dividi a metà il numero delle radici.

Moltiplica questo per se stesso.

Aggiungilo a 39 (quadrati e radici)

Ora prendi la radice di questo e sottrai da questo la metà delle radici.

Questa è la radice del quadrato che cercavi.

Dopo aver discusso i sei tipi di equazioni

al-Khwārizmī

si occupa di:

- Moltiplicazione di monomi e binomi
- Riduzione dei termini simili in somme e differenze di monomi
- Trasformazioni del tipo $a\sqrt{x} = \sqrt{a^2 x}$

X / XII secolo:
notevole sviluppo dell'algebra islamica

Indirizzo aritmetico-algebrico

Traduzione in arabo dell'*Arithmetica* di Diofanto

al-Karajī

al-Samaw'al

Indirizzo algebrico-geometrico

al-Khayyām

Al-Karajī
persiano, vissuto tra X e XI secolo
fonda a Baghdad una vera e propria scuola

Scopo dell'algebra:

Determinare le grandezze incognite mediante quelle note, utilizzando i metodi più efficaci

- Applica le operazioni aritmetiche ai monomi e ai polinomi
- Dà le formule per cubo e quadrato del binomio

•Un suo allievo gli attribuisce la tabella dei coefficienti di $(a + b)^n$ fino a n = 12

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

•Risolve equazioni del tipo:

$$a x^{2n} + b x^n = c$$

$$a x^{2n} + c = b x^n$$

$$b x^n + c = a x^{2n}$$

$$a x^{2m+n} = b x^{n+m} = c x^n$$

•Espone le trasformazioni per la razionalizzazione di radicali quadratici

•Si occupa di teoria dei numeri (somma dei primi n quadrati e cubi)

Principale successore di al-Karajī
è al-Samaw'al (XII secolo), suo allievo,
figlio di un erudito ebreo immigrato in Marocco e
di una letterata originaria dell'Iraq

Filosofo, medico, matematico
profondo conoscitore delle opere greche e indiane

•A soli 19 anni scrive il *Libro luminoso sull'aritmetica* in cui sintetizza di risultati raggiunti fino ad allora

•Espone sinteticamente la regola dei segni

•Fornisce la definizione di $x^0 = 1$ (con $x \neq 0$)

•Definisce le operazioni aritmetiche sulle potenze della stessa base con la seguente tabella:

6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6
x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{x^4}$	$\frac{1}{x^5}$	$\frac{1}{x^6}$

Primo passo verso il simbolismo matematico

Anticipa Michael Stifel, del XVII secolo (logaritmi)

Dai problemi geometrici classici o dai problemi astronomici si giunge alle equazioni di terzo grado

Duplicazione del cubo

Dividere una sfera data in modo tale che il rapporto fra i volumi dei segmenti ottenuti sia uguale ad un rapporto dato (Archimede – Sulla sfera e sul cilindro)

$$x^3 + \frac{4K}{K+1} r^3 = 3r x^2$$

Trisezione dell'angolo

Costruzione di poligoni regolari di 7 e 9 lati

'Umar ibn Ibrahim al-Khayyām

(1048-1131)

Il poeta persiano dei
Rubā'iyyāt
tradotti in inglese da Edward Fitzgerald nel 1859

matematica – astronomia - filosofia

Al-Khayyām definisce l'algebra come "teoria delle equazioni" nettamente distinta dall'aritmetica

La soluzione necessita di calcoli numerici e verifiche geometriche

"Forse uno di quelli che verranno dopo riuscirà a trovarla..."

$x^3 + bx = a$

$x^3 + a = bx$

$x^3 = bx + a$

$x^3 + cx^2 = a$

$x^3 + a = cx^2$

$x^3 = cx^2 + a$

$x^3 + a + cx^2 = bx$

$x^3 = bx + cx^2 + a$

$x^3 + a + bx = cx^2$

$x^3 + bx + cx^2 = a$

$x^3 + cx^2 = bx + a$

$x^3 + a = bx + cx^2$

$x^3 + bx = cx^2 + a$

- Le specie di ciascun tipo sono trattate separatamente e per ognuna è spiegata la scelta delle coniche da usare
- Rispetta l'omogeneità dimensionale
- Considera solo soluzioni positive

1258

Conquista dei mongoli

Fuga in Europa

"Le résultat final qui se dégage de tout cela, c'est que, de même qu'il est impossible de comprendre ces mathématiques arabes sans les mathématiques hellénistiques, il est également impossible de comprendre les mathématiques des XVIe et XVIIe siècles sans les mathématiques arabes"

Roshdi Rashed