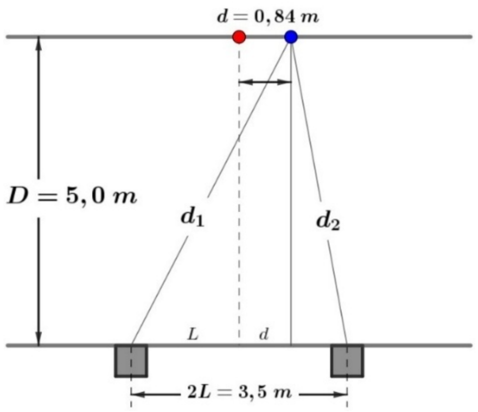
Esercizi scelti dal testo: James S. Walker, FISICA Modelli teorici e problem solving, vol. 2, Linx Pearson, ISBN 9788863647907

1. Due altoparlanti in opposizione di fase sono posizionati a una distanza di $3{,}5\ m$ uno dall'altro, entrambi orientati verso una parete che si trova a una distanza di $5{,}0\ m$ (figura 1). Un osservatore, che sta appoggiato alla parete in una posizione intermedia tra gli altoparlanti, sente interferenza distruttiva. Se l'osservatore sente interferenza costruttiva dopo essersi spostato lateralmente di $0{,}84\ m$, qual è la frequenza del suono emesso dagli altoparlanti?

$$2L = 3{,}5\ m \qquad D = 5{,}0\ m \qquad d = 0{,}84\ m \qquad v = 343\ m/s \qquad f?$$



Considerata l'opposizione di fase dei due altoparlanti, l'interferenza distruttiva che si verifica nella posizione intermedia (punto rosso) avrà una differenza tra i due cammini pari a un numero intero di lunghezze d'onda, mentre l'interferenza costruttiva che si verifica nel punto blu, avrà una differenza tra i due cammini pari a metà lunghezza d'onda:

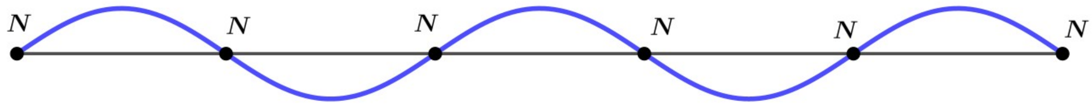
$$d_1 - d_2 = \frac{1}{2}\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2\left(\sqrt{D^2 + (L+d)^2} - \sqrt{D^2 + (L-d)^2}\right)$$

Dato che $v = \lambda f$:

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2\left(\sqrt{D^2 + (L+d)^2} - \sqrt{D^2 + (L-d)^2}\right)} = \mathbf{310\ Hz}$$

2. Un'onda stazionaria di $618\ Hz$ è prodotta su una corda lunga $1{,}30\ m$ fissata a entrambi gli estremi. Se la velocità delle onde nella corda è $402\ m/s$, quanti nodi ci sono nell'onda stazionaria?

$$f = 618\ Hz \qquad L = 1{,}30\ m \qquad v = 402\ m/s \qquad N?$$



Le forme date dalle onde stazionarie sono chiamate modi normali ed in esse sono presenti alcuni punti particolari, i nodi, nei quali non c'è alcuna vibrazione. I modi di un'onda stazionaria formano una serie armonica: la prima armonica ha due nodi, la seconda ne ha tre, la terza quattro e così via. La frequenza di un'onda stazionaria è data da $f_n = n\frac{v}{2L}$, dove n è il numero dell'armonica. Il numero dei nodi è dato da $n + 1$.

$$f_n = n\frac{v}{2L} \quad \Rightarrow \quad n + 1 = \frac{2Lf_n}{v} + 1 = \mathbf{5}$$

3. Se soffi sull'apertura di una bottiglia, la colonna d'aria all'interno comincia a vibrare e produce una nota. Per accordare la bottiglia, confronti la sua frequenza con quella del la di un diapason, pari a $440\ Hz$. All'inizio avverti una frequenza dei battimenti di $5{,}00\ Hz$, poi introduci un po' d'acqua nella bottiglia e la frequenza dei battimenti raggiunge il valore di $6{,}00\ Hz$. Quanto vale la frequenza finale della nota prodotta soffiando nella bottiglia?

$$f = 440\ Hz \qquad f_{b_1} = 5{,}00\ Hz \qquad f_{b_2} = 6{,}00\ Hz \qquad f_2?$$

La frequenza di battimento è data da: $|f_1 - f| = f_{b_1}$ e $|f_2 - f| = f_{b_2}$.
Soffiando sull'apertura di una bottiglia, otteniamo un moto vorticoso dell'aria, che produce un'onda stazionaria particolare, dove la frequenza è data da $f_n = n\frac{v}{4L}$, con L corrispondente all'altezza della colonna d'aria. Nel momento in cui introduciamo acqua nella bottiglia, la colonna d'aria diminuisce e la frequenza aumenta. Aggiungendo a questa considerazione la definizione di battimento, possiamo distinguere quattro casi:

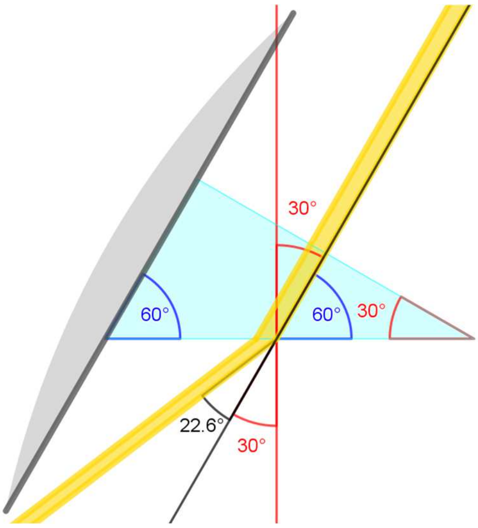
$$\begin{array}{c} f_1 - f = f_{b_1} \\ f_2 - f = f_{b_2} \\ \hline \boldsymbol{f_1 - f_2 = f_{b_1} - f_{b_2} < 0} \end{array} \qquad \begin{array}{c} f_1 - f = f_{b_1} \\ f - f_2 = f_{b_2} \\ \hline f_1 - f_2 = f_{b_1} + f_{b_2} > 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} f - f_1 = f_{b_1} \\ f_2 - f = f_{b_2} \\ \hline \boldsymbol{f_2 - f_1 = f_{b_1} + f_{b_2} > 0} \end{array} \qquad \begin{array}{c} f - f_1 = f_{b_1} \\ f - f_2 = f_{b_2} \\ \hline -f_1 + f_2 = f_{b_1} - f_{b_2} < 0 \end{array}$$

In base alle considerazioni fatte, possono verificarsi solo il primo e il terzo caso, che corrispondono a:

$$f_2 - f = f_{b_2} \quad \Rightarrow \quad f_2 = f + f_{b_2} = \mathbf{446\ Hz}$$

In una versione semplificata e meno generale il problema potrebbe essere affrontato in questo modo:
Dato che la frequenza del la è di $440\ Hz$, la prima frequenza registrata potrebbe essere, dato il battimento di $5{,}00\ Hz$, di $445\ Hz$ o di $435\ Hz$.
Allo stesso modo, la frequenza finale potrebbe essere di $446\ Hz$ o di $434\ Hz$.
Soffiando sull'apertura di una bottiglia, otteniamo un moto vorticoso dell'aria, che produce un'onda stazionaria particolare, dove la frequenza è data da $f_n = n\frac{v}{4L}$, con L corrispondente all'altezza della colonna d'aria. Nel momento in cui introduciamo acqua nella bottiglia, la colonna d'aria diminuisce e la frequenza aumenta. Per essere sicuri che la seconda frequenza sia maggiore della prima, è necessario che il valore della seconda sia di $\boldsymbol{446\ Hz}$.

4. La figura 2 mostra un raggio laser deflesso da un prisma. Qual è l'indice di rifrazione del prisma?



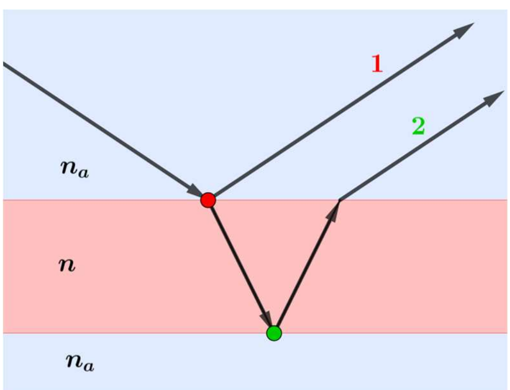
Per cominciare, per rendere più semplice l'interpretazione del problema, ruoto il prisma di 120°, in modo che la linea che delimita prisma e aria sia orizzontale e la normale a tale superficie verticale.
Traccio la normale nel punto in cui il raggio laser si deflette, uscendo dal prisma. I due angoli di 60° sono congruenti in quanto angoli corrispondenti in due parallele tagliate da una trasversale (il raggio è sicuramente parallelo alla base, visto che non viene deflesso incontrando la superficie del prisma, perciò la incide perpendicolarmente). Dato che la normale è perpendicolare alla superficie, si creano due angoli di 30°, uno complementare di quello di 60° e l'altro opposto al vertice rispetto al primo. Ecco, quindi, i dati che mi permettono di applicare la legge di Snell:

$$n_1 = 1{,}00 \qquad \theta_1 = 30° + 22.6° \qquad \theta_2 = 30°$$

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \quad \Rightarrow \quad n_2 = \frac{n_1 \sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \boldsymbol{1{,}59}$$

5. Un fascio di luce bianca incide su uno strato di acqua saponata ($n = 1{,}30$) che si trova in aria. La luce riflessa appare leggermente blu, dato che la luce rossa ($\lambda = 670\ nm$) è assente nella riflessione. Qual è lo spessore minimo dello strato di acqua saponata?

$$n = 1{,}30 \qquad n_a = 1{,}00 \qquad \lambda = 670\ nm \qquad d?$$



Traccio il fascio di luce che incide sullo strato di acqua saponata, con due strati di aria sia sopra che sotto. Il fascio si divide in due parti: la prima parte (1) viene riflessa dallo strato di acqua saponata e, nel punto indicato in rosso, dato che $n > n_a$ subisce un cambiamento di fase; la seconda parte (2) viene rifratta e raggiunge lo strato inferiore di separazione tra l'aria e l'acqua saponata, dove viene riflessa, ma, visto che $n < n_a$, non c'è un cambiamento di fase. Indicando con d lo spessore dello strato di acqua saponata e ponendo un'interferenza distruttiva per la luce rossa (che è assente nella riflessione), e indicando con N_2 il numero di lunghezze d'onda presenti nel raggio 2 e N_1 quelle presenti nel raggio 1, ottengo:

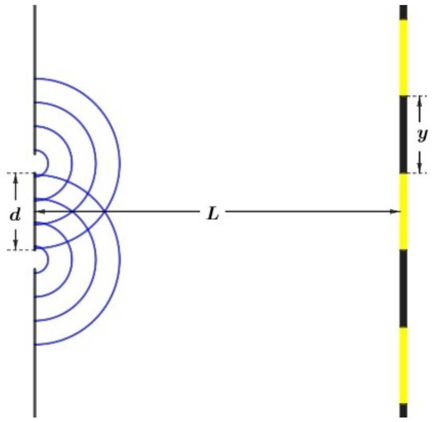
$$N_2 - N_1 = \frac{1}{2} \qquad \frac{2d}{\lambda_s} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

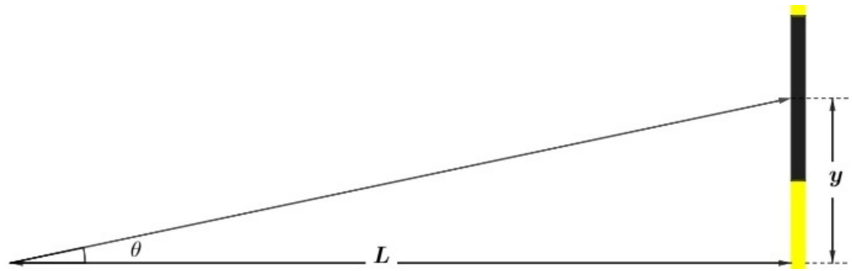
Ricordando che: $\lambda_s = \frac{\lambda}{n}$, posso calcolare quanto richiesto:

$$d = \frac{\lambda_s}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{2n} = \boldsymbol{258\ nm}$$

6. Una professoressa di fisica vuole produrre con una doppia fenditura una figura di interferenza di grandezza tale che tutti gli allievi in classe riescano a vederla. Data la misura della stanza, decide che la distanza sullo schermo fra due frange luminose successive debba essere come minimo di $2{,}50\ cm$. Supponendo che le fenditure abbiano una separazione di $0{,}0220\ mm$ e che sia usata la luce a $632{,}8\ nm$ di un laser He-Ne, qual è la distanza minima a cui deve essere posizionato lo schermo?

$$y = 2{,}50\ cm \qquad d = 0{,}0220\ mm \qquad \lambda = 632{,}8\ nm \qquad L?$$





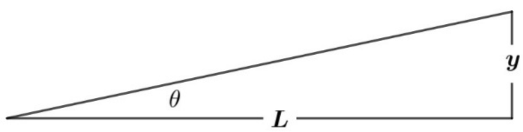
È possibile rappresentare la situazione nel modo indicato a lato, dato che la distanza L è presumibilmente molto più grande della distanza tra le fenditure.

Per determinare l'angolo θ, uso la condizione per determinare la frangia luminosa più vicina al punto centrale: $\sin\theta = \frac{\lambda}{d}$. Da questa ricavo l'ampiezza dell'angolo: $\theta = arc\sin\frac{\lambda}{d}$ e posso, quindi, applicare una delle relazioni dei triangoli rettagoli, per determinare la distanza richiesta:

$$y = L\tan\theta \quad \Rightarrow \quad L = \frac{y}{\tan\theta} = \frac{y}{\tan\left(arc\sin\frac{\lambda}{d}\right)} = \mathbf{86{,}9\ cm}$$

7. Si dice che la macchina fotografica montata su un satellite spia riesca a leggere la targa di una macchina. Supponendo che le cifre della targa siano a una distanza di $5{,}0\ cm$ l'una dall'altra e che il satellite spia si trovi a un'altezza di $160\ km$, quale deve essere il diametro di apertura della macchina fotografica? (Considera la luce di lunghezza d'onda $550\ nm$)

$$y = 5{,}0\ cm \qquad L = 160\ km \qquad \lambda = 550\ nm \qquad d?$$



Per determinare quanto richiesto, considero innanzi tutto una delle relazioni dei triangoli rettangoli, per individuare il valore dell'angolo minimo: $y = L\tan\theta_{min}$. L'angolo è così piccolo che $\tan\theta_{min} \approx \theta_{min}$, perciò:

$$\theta_{min} = \frac{y}{L}$$

Per il criterio di Rayleigh, perché due oggetti possano essere visti come separati:

$$\theta_{min} = 1{,}22\frac{\lambda}{d} \quad \Rightarrow \quad d = 1{,}22\frac{\lambda}{\theta_{min}} = 1{,}22\ \frac{\lambda L}{y} = \mathbf{2{,}1\ m}$$