1. Risolvi graficamente la seguente disequazione:

$$1+\sqrt{|x|-x^2}\le 2-x$$

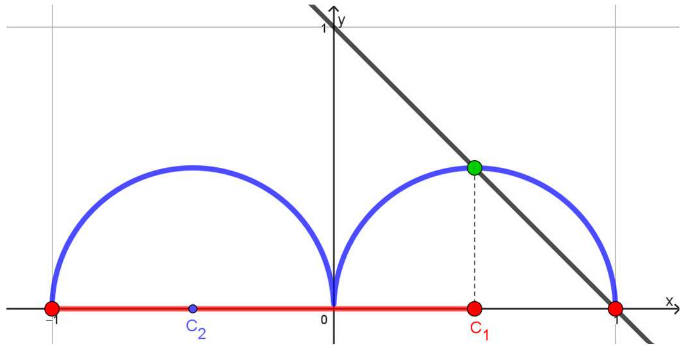
Rappresento le funzioni: $y=\sqrt{|x|-x^2}$ e $y=1-x$

$$\begin{cases} y\ge 0 \\ x^2+y^2-|x|=0 \end{cases}$$

Che corrisponde a due archi di circonferenza:

$$\begin{cases} y\ge 0 \ \wedge \ 0\le x\le 1 \\ x^2+y^2-x=0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y\ge 0 \ \wedge \ -1\le x<0 \\ x^2+y^2+x=0 \end{cases}$$

Si tratta di due semicirconferenze passanti per l'origine, la prima con centro $C_1\left(\frac{1}{2},0\right)$ e la seconda $C_2\left(-\frac{1}{2},0\right)$.



Dal grafico individuo le ascisse dei punti di intersezione e determino la soluzione:

$$\boldsymbol{-1\le x\le \frac{1}{2} \ \vee \ x=1}$$

2. Determina i valori del parametro $k\in\mathbb{R}$ per i quali l'equazione $x^2+y^2-4kx-2\,(k-1)\,y+4=0$:
   A. la circonferenza esiste e non è degenere;
   B. la circonferenza ha il centro sulla bisettrice di primo e terzo quadrante;
   C. la circonferenza racchiude un'area pari a 4π.

A. Perché l'equazione rappresenti una circonferenza non degenere, il radicando che si ottiene per determinare il raggio deve essere positivo:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c>0 \ \Rightarrow \ 4k^2+(k-1)^2-4>0 \ \Rightarrow \ 5k^2-2k-3>0 \ \Rightarrow \ \begin{matrix} k_1=1 \\ k_2=-\frac{3}{5} \end{matrix} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{k<-\frac{3}{5} \ \vee \ k>1}$$

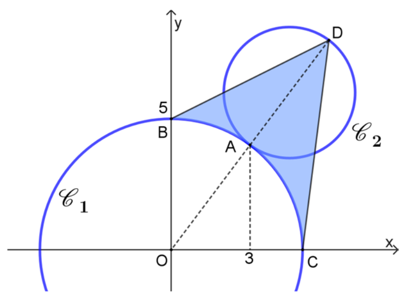
B. Le generiche coordinate del centro, $(2k;k-1)$, devono soddisfare l'equazione della bisettrice, $y=x$:

$$k-1=2k \ \Rightarrow \ \boldsymbol{k=-1 \quad acc.}$$

C. Perché racchiuda un'area pari a 4π, il raggio deve essere pari a 2 (infatti l'area di una circonferenza si calcola come πr^2:

$$\sqrt{5k^2-2k-3}=2 \ \Rightarrow \ 5k^2-2k-7=0 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{k=-1 \ \vee \ k=\frac{7}{5} \quad acc,}$$

3. Scrivi le equazioni delle circonferenze $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ in figura, sapendo che sono tangenti nel punto A e che $\mathcal{C}_2$ ha raggio $\frac{5}{2}$. Determina le coordinate del punto D e calcola l'area della zona colorata.



La circonferenza $\mathcal{C}_1$ ha centro nell'origine e raggio 5: $\mathcal{C}_1$: $x^2+y^2=25$.
Sostituendo nell'equazione l'ascissa di A indicata nel disegno, posso determinare la sua ordinata: $9+y^2=25 \ \Rightarrow \ y=\pm 4$ e scelgo l'ordinata positiva, visto il disegno: $A(3;4)$.
Dalla geometria euclidea, trattandosi di due circonferenze tangenti esternamente, so che i centri e il punto di tangenza sono allineati. Dal disegno, si evince che anche D si trova sulla stessa retta, perciò il segmento AD è il diametro della circonferenza $\mathcal{C}_2$. Visto che il raggio della seconda circonferenza ha misura $\frac{5}{2}$, il suo diametro ha misura 5, perciò A è il punto medio del segmento OD.
Conoscendo O e A, posso determinare D:

$$\begin{cases} \dfrac{x_O+x_D}{2}=x_A \\ \dfrac{y_O+y_D}{2}=y_A \end{cases} \qquad \begin{cases} x_D=2x_A-x_O=6 \\ y_D=2y_A-y_O=8 \end{cases}$$

Il centro C_2 di $\mathcal{C}_2$ è il punto medio del diametro AD, perciò: $C_2\left(\frac{9}{2};6\right)$ e posso, quindi, determinare l'equazione della seconda circonferenza:

$$\mathcal{C}_2\colon \left(x-\frac{9}{2}\right)^2+(y-6)^2=\frac{25}{4} \ \Rightarrow \ x^2+y^2-9x-12y+50=0$$

Per determinare l'area richiesta: $\mathcal{A}=\mathcal{A}_{BCD}-\mathcal{A}_{ABC}=\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot d(D,BC)-\left(\frac{1}{4}\mathcal{A}_{\mathcal{C}_2}-\frac{1}{2}\overline{BO}\cdot\overline{OC}\right)$

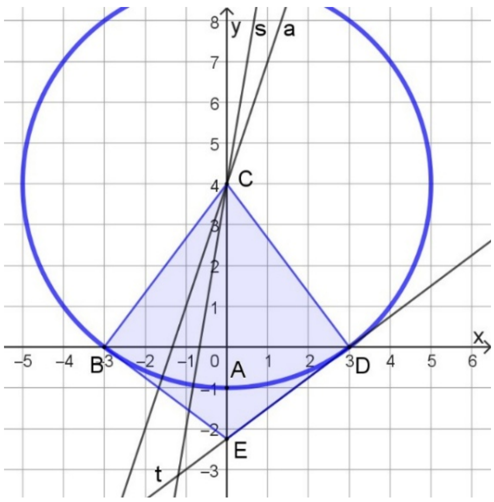
Calcolo gli elementi mancanti:

$$\overline{BC}=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2} \qquad rta(B;C): y=-x+5 \qquad d(D;BC)=\frac{|6+8-5|}{\sqrt{2}}=\frac{9}{\sqrt{2}}$$

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}5\sqrt{2}\cdot\frac{9}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\pi\cdot 5^2+\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5=\mathbf{35-\frac{25}{4}\pi}$$

4. Trova l'equazione della circonferenza che passa per i punti $A(0;\,-1)$ e $B(-3;0)$ e ha il centro C sulla retta di equazione $6x-y+4=0$. Traccia per il punto D di intersezione della circonferenza con il semiasse positivo delle x la tangente alla circonferenza, che interseca in E l'asse y. Calcola l'area del quadrilatero BEDC.

Per determinare il centro C, calcolo l'intersezione tra l'asse del segmento AB e la retta data cui appartiene il centro:



$$\begin{cases}6x-y+4=0\\ x^2+(y+1)^2=(x+3)^2+y^2\end{cases} \qquad \begin{cases}6x-y+4=0\\ 3x-y+4=0\end{cases} \qquad C(0;4)$$

Applicando la definizione di circonferenza come luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso, ottengo l'equazione della circonferenza, sapendo che la distanza $\overline{CA}=|4+1|=5$ è il raggio:

$$(x-0)^2+(y-4)^2=5^2 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2-8y-9=0$$

Il centro della circonferenza si trova sull'asse y, perciò la circonferenza è simmetrica rispetto all'asse y. Il punto D, quindi, è simmetrico di B rispetto all'asse y e ha coordinate $D(3;0)$. Per determinare la tangente in D, calcolo il coefficiente angolare della retta passante per C e per D, raggio perpendicolare alla tangente nel punto di tangenza:

$$m_{CD}=\frac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=-\frac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad m_t=\frac{3}{4} \quad\Rightarrow\quad t: y=\frac{3}{4}(x-3)$$

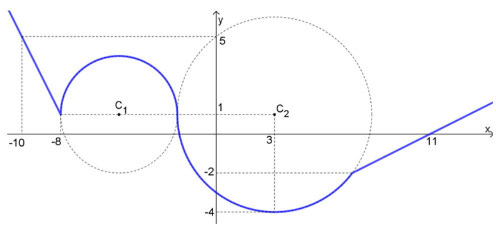
Dall'ordinata all'origine della retta tangente, ottengo le coordinate del punto E: $E\left(0;\,-\frac{9}{4}\right)$.

Il quadrilatero BEDC ha le diagonali perpendicolari (visto che giacciono sugli assi cartesiani), perciò:

$$\mathcal{A}=\frac{1}{2}\overline{CE}\cdot\overline{BD}=\frac{1}{2}\cdot\left(4+\frac{9}{4}\right)\cdot 6=\mathbf{\frac{75}{4}}$$

5. Scrivi l'espressione analitica della seguente funzione, di cui è assegnato il grafico (gli archi rappresentati sono archi di circonferenza di cui sono indicati i centri).

Determino l'equazione della semiretta a sinistra:



$$\frac{y-1}{5-1}=\frac{x+8}{-10+8} \quad\Rightarrow\quad y=-2x-15$$

Dal grafico, posso dedurre che il raggio della seconda circonferenza è 5, mentre il centro ha coordinate $C_2(3;\ 1)$, perciò l'arco di circonferenza ha equazione:

$$(x-3)^2+(y-1)^2=5^2 \quad\Rightarrow\quad y=1-\sqrt{25-(x-3)^2}$$

Sostituendo l'ordinata -2, trovo l'ascissa del punto in cui la circonferenza interseca la seconda semiretta: $(x-3)^2=5^2-3^2 \quad\Rightarrow\quad x=7$

Posso, quindi, determinare l'equazione della seconda semiretta e del primo arco di circonferenza che, visto il raggio della seconda circonferenza, ha diametro uguale a 6, quindi raggio pari a 3, e centro $C_1(-5;1)$:

$$(x+5)^2+(y-1)^2=3^2 \quad\Rightarrow\quad y=1+\sqrt{9-(x+5)^2} \qquad\qquad \frac{y+2}{0+2}=\frac{x-7}{11-7} \quad\Rightarrow\quad y=\frac{1}{2}x-\frac{11}{2}$$

$$\boldsymbol{y=\begin{cases}-2x-15 & se\ x\le -8\\ 1+\sqrt{-x^2-10x-16} & se\ -8<x\le -2\\ 1-\sqrt{16-x^2+6x} & se\ -2<x\le 7\\ \frac{1}{2}x-\frac{11}{2} & se\ x>7\end{cases}}$$