Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni:

1. $$\tan\left(3x-\frac{\pi}{7}\right)=\cot\left(\frac{2}{5}\pi-2x\right)$$

Dato che: $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha \quad \Rightarrow \quad \tan\left(3x-\frac{\pi}{7}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{2}{5}\pi-2x\right)\right)$

$$3x-\frac{\pi}{7}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{2}{5}\pi-2x\right)+k\pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x=\frac{17}{70}\pi+k\pi}$$

2. $$\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=0$$

$$2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad 2x-\frac{\pi}{3}=k\pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x=\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{2}}$$

3. $$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)+\cos 2x=0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\cos 2x=0$$

$$-\cos x+\cos 2x=0 \quad \Rightarrow \quad \cos x=\cos 2x \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x=2x+2k\pi & x=-2k\pi \\ x=-2x+2k\pi & x=\frac{2}{3}k\pi \end{matrix} \qquad \boldsymbol{x=\frac{2}{3}k\pi}$$

4. $$3\,(arc\sin x)^2+\pi\,arc\sin x=0$$

Pongo $y=arc\sin x$ e risolvo l'equazione: $3y^2+\pi y=0 \quad \Rightarrow \quad y(3y+\pi)=0 \quad \Rightarrow \quad y_1=0 \quad \vee \quad y_2=-\frac{\pi}{3}$

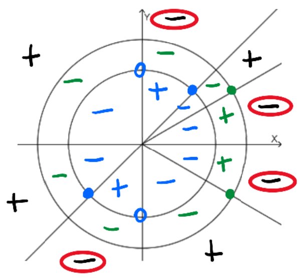
$$arc\sin x=0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x=0} \qquad \vee \qquad arc\sin x=-\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x=-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

5. $$2\,(\sin x-\cos x)\le\sqrt{3}\tan x-\sqrt{3}$$

$$2\cos x\;(\tan x-1)-\sqrt{3}(\tan x-1)\le 0 \quad \Rightarrow \quad (\tan x-1)\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)\le 0$$

$IF\ge 0:\ \tan x\ge 1$

$IIF\ge 0:\ \cos x\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$



$$\boldsymbol{-\frac{\pi}{6}+2k\pi\le x\le\frac{\pi}{6}+2k\pi} \quad \vee$$

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}+k\pi\le x<\frac{\pi}{2}+k\pi}$$

Nel grafico dei segni, il primo fattore è quello all'interno, indicato in blu, e il secondo fattore è all'esterno, indicato in verde

6. $$\sqrt{3}\sin^2 x+2\sin x\cos^2\frac{x}{2}-\sin x=0$$

$$\sqrt{3}\sin^2 x+2\sin x\cdot\frac{1+\cos x}{2}-\sin x=0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3}\sin^2 x+\sin x+\sin x\cos x-\sin x=0$$

$$\sin^2 x\;\left(\sqrt{3}+\cot x\right)=0 \qquad \begin{matrix}\sin x=0\\ \cot x=-\sqrt{3}\end{matrix} \qquad \boldsymbol{x=k\pi} \quad \vee \quad \boldsymbol{x=-\frac{\pi}{6}+k\pi}$$

7. $\sqrt{3}\sin x - \cos x + \sqrt{2} \geq 0$

Applicando l'angolo aggiunto: $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5}{4}\pi + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{-\frac{\pi}{12} + 2k\pi \leq x \leq \frac{17}{12}\pi + 2k\pi}$$

8. $2\,|\cos x| < 1$

$$-\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + k\pi}$$

9. $\sqrt{\sqrt{3} - 2\cos x} \leq 0$

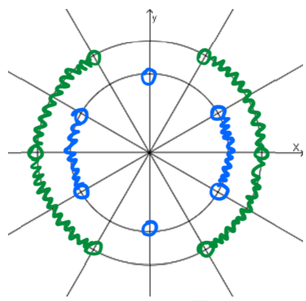
Una radice quadrata non può mai essere negativa. Perciò, la disequazione sarà verificata solo nel caso in cui il radicando sia nullo:

$$\sqrt{3} - 2\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi}$$

Determina il dominio delle seguenti funzioni:

10. $y = \log_2(1 - 3\tan^2 x) + \log_2(3\cot^2 x - 1)$

$$\begin{cases} 1 - 3\tan^2 x > 0 \\ 3\cot^2 x - 1 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{3} < \tan x < \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cot x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \vee \quad \cot x > \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$



Nel grafico del sistema, la prima disequazione è quella all'interno, indicata in blu, e la seconda è all'esterno, indicata in verde

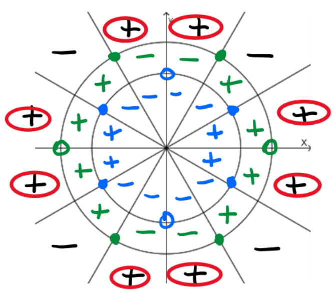
$$\boldsymbol{-\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \wedge \quad x \neq k\pi}$$

11. $y = \sqrt{(1 - 3\tan^2 x)(3\cot^2 x - 1)}$

$$(1 - 3\tan^2 x)(3\cot^2 x - 1) \geq 0$$

$$IF \geq 0:\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq \tan x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$IIF \geq 0:\ \cot x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \vee \quad \cot x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$



Nel grafico dei segni, il primo fattore è quello all'interno, indicato in blu, e il secondo fattore è all'esterno, indicato in verde

$$\boldsymbol{-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad x \neq k\frac{\pi}{2}}$$

12. $y = \sqrt{\dfrac{\cos x + \frac{1}{\tan x}}{\tan x} + 1}$

$$\frac{\cos x + \frac{1}{\tan x}}{\tan x} + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin x + 1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\tan x} \geq -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin x + 1}{\tan^2 x} \geq -1 \quad \boldsymbol{\forall x \neq k\frac{\pi}{2}}$$

Il numeratore del primo membro è sempre positivo, tranne nel caso in cui $\sin x = -1$, in cui è nullo

Il denominatore è un quadrato perciò sempre positivo. Questo significa che la frazione a primo membro è sempre positiva e, quindi, maggiore di – 1.