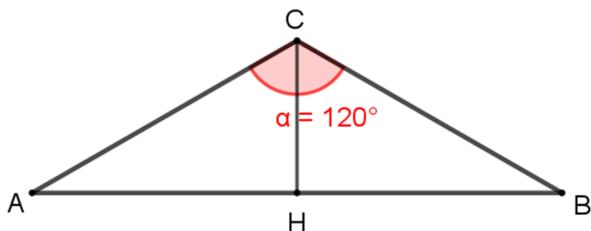


1. Calcola il perimetro e l'area di un triangolo isoscele con l'angolo al vertice di 120° e la base di $20\sqrt{3}$ cm.



$$\overline{AB} = 20\sqrt{3} \text{ cm} \quad \widehat{BCA} = \alpha = 120^\circ$$

Traccio l'altezza CH relativa alla base. In un triangolo isoscele, questa è anche mediana e bisettrice, perciò:

$$\widehat{BCH} = \widehat{HCA} = \frac{\alpha}{2} = 60^\circ \quad \overline{AH} = \overline{HB} = 10\sqrt{3} \text{ cm}$$

Posso determinare il lato obliquo AB, usando il teorema dei triangoli rettangoli:

$$\overline{HB} = \overline{CB} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \overline{CB} = \frac{\overline{HB}}{\sin 60^\circ} = 20 \text{ cm}$$

Ora ho tutti gli elementi per calcolare perimetro e area:

$$2p = \overline{AB} + 2 \cdot \overline{BC} = 20(\sqrt{3} + 2) \text{ cm} \quad \mathcal{A} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \sin 120^\circ = 100\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

2. Verifica che un triangolo, con due lati di misura a e $2a$ e avente la tangente dell'angolo compreso uguale a $\sqrt{15}$ è isoscele.

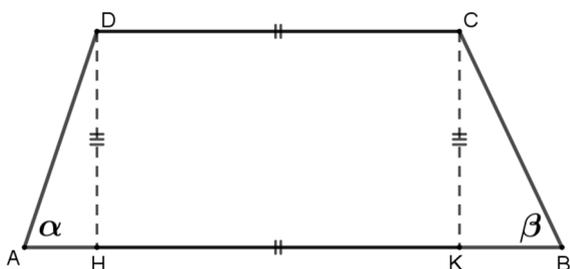
Applico il teorema di Carnot per determinare il terzo lato, ma prima determino il valore del coseno a partire dalla tangente:

$$\sqrt{15} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow 15 \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{a^2 + (2a)^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \cos \alpha} = \sqrt{a^2 + 4a^2 - a^2} = 2a$$

Anche il terzo lato misura $2a$, perciò è **il triangolo è isoscele**.

3. Nel trapezio ABCD, la base minore DC misura $5a\sqrt{2}$ e l'altezza DH misura $3a\sqrt{2}$; si sa inoltre che, dette α l'ampiezza dell'angolo \widehat{DAB} e β quella dell'angolo \widehat{ABC} , è $\tan \alpha = 3$ e $\cos \beta = \frac{\sqrt{22}}{11}$. Determina la misura della base maggiore AB del trapezio.



$$\overline{CD} = 5a\sqrt{2} \quad \overline{DH} = 3a\sqrt{2} \quad \tan \alpha = 3 \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{22}}{11}$$

Applico i teoremi dei triangoli rettangoli al triangolo AHD, dove DH è l'altezza del trapezio:

$$\overline{DH} = \overline{AH} \tan \alpha \Rightarrow \overline{DH} = 3\overline{AH} \Rightarrow \overline{AH} = a\sqrt{2}$$

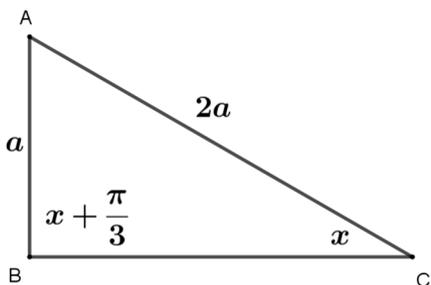
Le due altezze sono uguali, $\overline{DH} = \overline{CK}$. Considero il triangolo rettangolo KBC:

$$\overline{CK} = \overline{KB} \tan \beta \Rightarrow \overline{KB} = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \overline{CK} = \frac{\frac{\sqrt{22}}{11}}{\sqrt{1 - \frac{22}{121}}} 3a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{22}}{11} \cdot \frac{11}{3\sqrt{11}} \cdot 3a\sqrt{2} = 2a$$

A questo punto posso calcolare la lunghezza della base maggiore del trapezio:

$$\overline{AB} = \overline{AH} + \overline{HK} + \overline{KB} = \overline{AH} + \overline{DC} + \overline{KB} = a\sqrt{2} + 5a\sqrt{2} + 2a = 2a(3\sqrt{2} + 1)$$

4. In un triangolo un lato misura a e l'altro $2a$. Calcola gli angoli a essi opposti sapendo che uno supera l'altro di 60° .



Applico il teorema dei seni:

$$\frac{\overline{AB}}{\sin x} = \frac{\overline{AC}}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} \Rightarrow \frac{a}{\sin x} = \frac{2a}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}$$

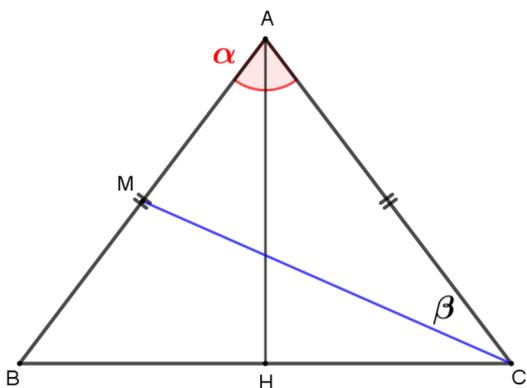
Da questa relazione ricavo l'equazione:

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 2\sin x \Rightarrow 3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$$

$$2\sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow x - \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

I due angoli hanno ampiezza: 30° e 90° .

5. È dato un triangolo ABC, isoscele sulla base BC, di cui conosce il lato $\overline{AB} = 10a$, il coseno dell'angolo al vertice, $\cos \hat{BAC} = \frac{7}{25}$. Determina la misura del perimetro e l'area del triangolo. Detto poi M il punto medio di AB, determina CM e $\sin \hat{MCA}$.



$$\overline{AB} = 10a \quad \cos \alpha = \frac{7}{25} \quad 2p? \mathcal{A}? \quad \overline{AM} = \overline{MB} \quad \overline{CM}? \sin \beta?$$

Traccio l'altezza AH relativa alla base BC. In un triangolo isoscele, l'altezza relativa alla base è anche bisettrice dell'angolo al vertice e mediana della base, perciò posso determinare il coseno dell'angolo \hat{HAB} con le formule di bisezione:

$$\hat{HAB} = \frac{1}{2}\hat{BAC} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \frac{3}{5}$$

Applicando i teoremi dei triangoli rettangoli:

$$\overline{BH} = \overline{AB} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 6a$$

Posso determinare perimetro e area del triangolo dato:

$$2p = 2\overline{AB} + 2\overline{BH} = 32a \quad \mathcal{A} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AB} \cdot \sin \alpha = 50a^2 \sqrt{1 - \frac{7^2}{25^2}} = 50a^2 \sqrt{\frac{(25-7)(25+7)}{25^2}} = 48a^2$$

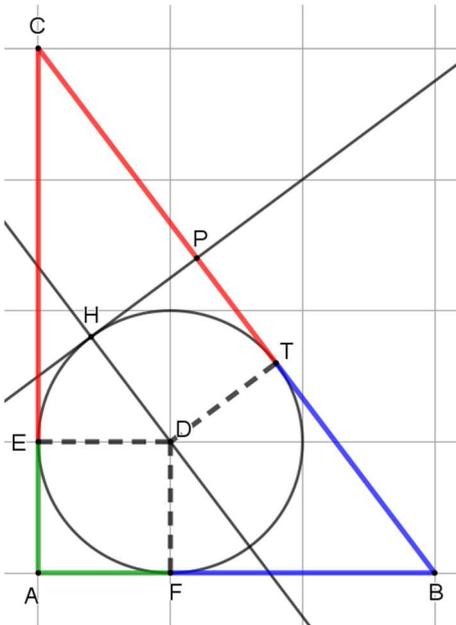
Nel triangolo MCA, dove MC è la mediana del lato AB, come richiesto dal testo, conosco la misura dei lati AM e AC e la misura dell'angolo di vertice A, perciò, applicando il teorema del coseno posso determinare la misura della mediana MC:

$$\overline{MC} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{AC} \cdot \cos \alpha} = \sqrt{25a^2 + 100a^2 - 100a^2 \cdot \frac{7}{25}} = a\sqrt{97}$$

Ora posso applicare il teorema dei seni:

$$\frac{\overline{AM}}{\sin \beta} = \frac{\overline{MC}}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin \beta = \frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} \sin \alpha = \frac{5a}{a\sqrt{97}} \cdot \frac{24}{25} = \frac{24\sqrt{97}}{485}$$

6. In un triangolo rettangolo ABC, rettangolo in A, $\sin \hat{A}CB = \frac{3}{5}$. Sapendo che l'area del triangolo misura 6, determina le misure dei lati del triangolo e del raggio della circonferenza inscritta. Sia T il punto in cui la circonferenza inscritta nel triangolo tocca l'ipotenusa CB e sia P quel punto del segmento CT tale che la perpendicolare a CB in P sia la tangente alla circonferenza. Quanto misura CP?



$$\sin \hat{A}CB = \frac{3}{5} \quad \mathcal{A} = 6 \quad \overline{AB} ? \quad \overline{BC} ? \quad \overline{CA} ? \quad \overline{DE} ? \quad \overline{CP} ?$$

Uso l'area e i teoremi dei triangoli rettangoli per determinare le misure dei lati, sapendo che $\cos \hat{A}CB = \sqrt{1 - \sin^2 \hat{A}CB} = \frac{4}{5}$:

$$\begin{cases} \overline{AC} = \overline{BC} \cos \hat{A}CB \\ \frac{1}{2} \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \sin \hat{A}CB = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{AC} = \frac{4}{5} \overline{BC} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \overline{BC}^2 \cdot \frac{3}{5} = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{AC} = 4 \\ \overline{BC} = 5 \end{cases}$$

E quindi il terzo lato è $\overline{AB} = 3$. Indicato con r il raggio della circonferenza inscritta, che risulta essere tangente ai lati AB, BC e CA rispettivamente in F, T ed E, dal teorema delle tangenti so che: $\overline{CE} = \overline{CT} = 4 - r$, $\overline{AE} = \overline{AF} = r$, $\overline{BF} = \overline{BT} = 3 - r$, perché il quadrilatero AFDE è un quadrato di lato r . Posso, quindi, ricavare il raggio:

$$\overline{BC} = \overline{CT} + \overline{BT} = 4 - r + 3 - r = 7 - 2r$$

E dato che l'ipotenusa $\overline{BC} = 5$, $r = 1$.

Traccio la perpendicolare a BC in P, in modo tale che sia tangente alla circonferenza inscritta in H. Siccome il raggio tracciato per il punto di tangenza è perpendicolare alla tangente, il quadrilatero DTPH è un quadrato di lato pari al raggio. Perciò, dato che il segmento $\overline{CT} = 3$, sottraendo il raggio ottengo $\overline{CP} = 2$.