1. Un sistema di 1525 particelle, elettroni e protoni, ha una carica totale di $-5{,}456 \cdot 10^{-17}C$. Quanti elettroni ci sono nel sistema?

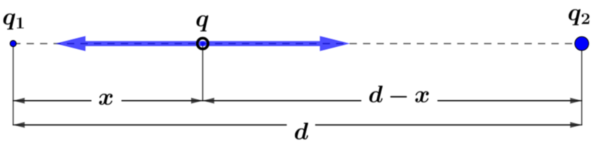
$$N = 1525 \qquad Q = -5{,}456 \cdot 10^{-17}\,C \qquad e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}C \qquad n?$$

Indicando con n il numero degli elettroni e con m quello dei protoni, ottengo il sistema:

$$\begin{cases} n + m = N \\ -ne + me = Q \end{cases} \qquad \begin{cases} n + m = N \\ -n + m = \dfrac{Q}{e} \end{cases} \qquad 2n = N - \frac{Q}{e} \qquad n = \frac{N}{2} - \frac{Q}{2e} = \mathbf{933}$$

2. Due cariche, rispettivamente di $5{,}0\,nC$ e $20\,nC$, sono a una distanza di $9{,}0\,cm$. Volendo inserire una terza carica sulla retta congiungente le due cariche iniziali, in che punto di tale retta deve essere posta la terza carica affinché essa sia in equilibrio?

$$q_1 = 5{,}0\,nC \qquad q_2 = 20\,nC = 4q_1 \qquad d = 9{,}0\,cm \qquad x?$$



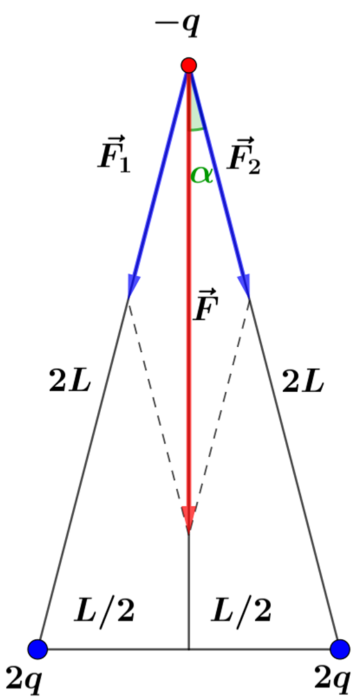
Indipendentemente dal segno della terza carica, essa sarà oggetto di due forze con verso opposto, una per azione della carica q_1 e l'altra per azione di q_2, perciò, per essere in equilibrio, dovrà risentire di una forza totale nulla, e, quindi, le due forze dovranno avere lo stesso modulo:

$$F_1 = F_2 \quad \Rightarrow \quad k\frac{q_1 q}{x^2} = k\frac{q_2 q}{(d-x)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{q_1}{x^2} = \frac{4q_1}{(d-x)^2} \quad \Rightarrow \quad (d-x)^2 = 4x^2$$

Trattandosi di distanze e dato che $d - x > 0$, posso estrarre la radice di entrambi i membri, ottenendo solo quantità positive:

$$d - x = 2x \quad \Rightarrow \quad 3x = d \quad \Rightarrow \quad x = \frac{d}{3} = \mathbf{3{,}0\,cm}$$

3. Tre cariche si trovano nei vertici di un triangolo isoscele, come indicato in figura 1. Determina modulo, direzione e verso della forza agente sulla carica negativa, sapendo che $L = 1{,}0\,cm$ e $q = 2{,}6\,\mu C$.



$$L = 1{,}0\,cm \qquad q = 2{,}6\,\mu C \qquad \vec{F}?$$

Rappresento la situazione evidenziando la simmetria del sistema di cariche. Individuo come **asse x** la congiungente le due cariche positive, diretta verso destra, e come **asse y** l'asse del segmento congiungente le due cariche positive che, in un triangolo isoscele – come è la configurazione di cariche data – coincide con l'altezza relativa alla base e con la bisettrice dell'angolo al vertice. Lo scelgo rivolto verso il basso. Inoltre: $F_1 = F_2 = k\frac{2q^2}{(2L)^2} = k\frac{q^2}{2L^2} = F$, visto che le due forze sono determinate dalle stesse cariche, e agiscono in punti equidistanti da esse. Indicato con α la metà dell'angolo al vertice e applicando il teorema dei triangoli rettangoli, ottengo:

$$\frac{L}{2} = 2L\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Determino le componenti delle forze, usando come asse x la base del triangolo e come asse y l'altezza relativa alla base, ma rivolta verso il basso:

$$F_{1_x} = -F\sin\alpha \qquad F_{1_y} = F\cos\alpha$$

$$F_{2_x} = F\sin\alpha \qquad F_{2_y} = F\cos\alpha$$

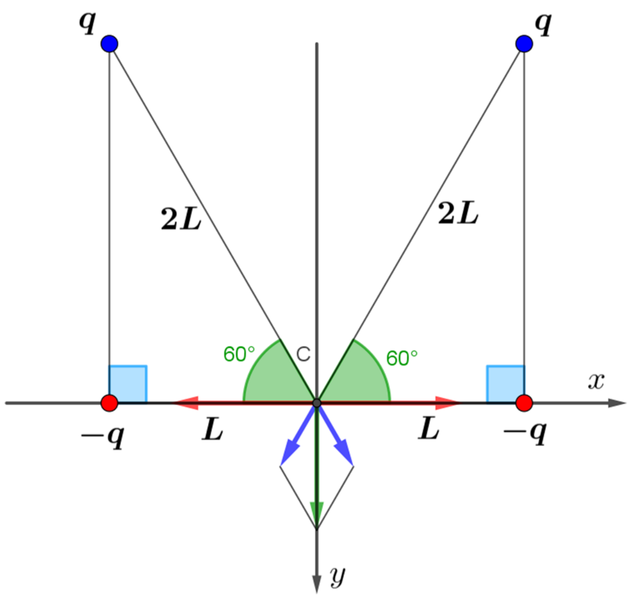
Perciò la forza agente è:

$$\vec{F} = \left(F_{1_x} + F_{2_x}\right)\hat{x} + \left(F_{1_y} + F_{2_y}\right)\hat{y} = 2F\cos\alpha\;\hat{y}$$

In altre parole, la forza risultante **ha come direzione l'altezza del triangolo isoscele relativa alla base**, è rivolta **verso le due cariche positive** ed ha modulo:

$$F = 2k\frac{q^2}{2L^2}\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}k\frac{q^2}{L^2} = \mathbf{0{,}59\,kN}$$

4. Cariche uguali in valore assoluto si trovano disposte come la configurazione di cariche della figura 2. Determina l'intensità, la direzione e il verso del vettore campo elettrico nel punto C. Se la carica è di $1{,}73\ nC$ e il campo elettrico risultante ha intensità $67\ kN/C$, qual è la distanza tra le cariche negative?



Considero un piano cartesiano con origine coincidente con C, con asse x dato dalla retta passante per le cariche negative e un asse y perpendicolare all'asse x, che costituisce un asse di simmetria per la configurazione di cariche data. Gli angoli indicati misurano 60°, dato che le distanze 2L e L sono, rispettivamente, ipotenusa e cateto di un triangolo rettangolo, che risulta essere metà di un triangolo equilatero.

Fatte queste premesse, si può vedere come i campi elettrici dovuti alle cariche negative nel punto C siano uguali e opposti, perciò con risultante nulla. I due campi elettrici dovuti alle cariche positive sono invece uguali in modulo:

$$E = k\frac{q}{(2L)^2}$$

Determino le componenti dei vettori:

$$\vec{E}_1 = E\cos 60°\ \hat{x} + E\sin 60°\ \hat{y}$$
$$\vec{E}_2 = -E\cos 60°\ \hat{x} + E\sin 60°\ \hat{y}$$

$$\vec{E} = (E\cos 60° - E\cos 60°)\ \hat{x} + (E\sin 60° + E\sin 60°)\ \hat{y} = k\sqrt{3}\frac{q}{(2L)^2}\hat{y}$$

Determino la distanza $2L$, corrispondente alla richiesta del problema, sostituendo i dati forniti:

$$2L = \sqrt{\frac{kq\sqrt{3}}{E}} = \mathbf{0{,}020\ m}$$

5. Due cariche puntiformi di uguale modulo distano tra loro $7{,}5\ cm$. Nel punto medio della congiungente, l'intensità del campo elettrico risultante è $45\ N/C$. Calcola il valore delle cariche.

$$d = 7{,}5\ cm \qquad E = 45\ N/C \qquad q?$$

Se le due cariche avessero lo stesso segno, il campo elettrico nel punto medio della congiungente sarebbe **nullo**, perciò le due cariche hanno **segno opposto** e il campo elettrico risultante è dato dalla somma dei due campi elettrici, che hanno **la stessa direzione, lo stesso verso e lo stesso modulo**:

$$E = 2k\frac{q}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} = 8k\frac{q}{d^2} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{Ed^2}{8k} = \mathbf{3{,}5\ pC}$$