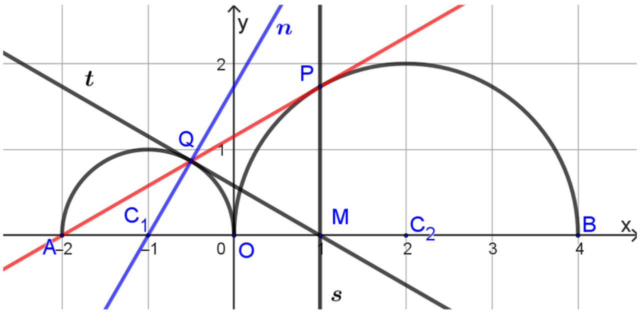
1. Dati i punti $A(-2,0)$ e $B(4,0)$, considera le due semicirconferenze rispettivamente di diametro OA e OB (essendo O l'origine del sistema di riferimento), situate nel semipiano delle ordinate non negative. Indicato con M il punto medio di AB, traccia la retta s passante per M e perpendicolare all'asse x, chiamando P il punto d'intersezione della retta s con la semicirconferenza di raggio maggiore. Conduci poi da M la tangente alla semicirconferenza di raggio minore, indicando con Q il punto di contatto con essa. Dimostra che i punti A, P e Q sono allineati.



Determino le coordinate del centro C_1 del primo arco di circonferenza, punto medio del segmento AO:

$$C_1(-1,0) \qquad r_1 = \overline{C_1O} = 1$$

Ho tutti gli elementi per determinare l'equazione della semicirconferenza, partendo da quella della circonferenza con centro C_1 e raggio r_1:

$$(x+1)^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\gamma_1: y = \sqrt{-x^2-2x}}$$

Analogamente posso procedere con la seconda semicirconferenza:

$$C_2 = M(O,B) = (2,0) \qquad r_2 = \overline{C_2O} = 2 \qquad (x-2)^2 + y^2 = 2^2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\gamma_2: y = \sqrt{4x-x^2}}$$

Determino le coordinate del punto medio M del segmento AB e la retta s richiesta: $M(1;0)$ $\quad$ $\boldsymbol{s: x = 1}$.

Posso individuare le coordinate del punto P, intersecando la retta s con la semicirconferenza γ_2:

$$\begin{cases} s \\ \gamma_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{4x-x^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \qquad \boldsymbol{P(1;\ \sqrt{3})}$$

Determino l'equazione della tangente t: considero la generica retta passante per M e pongo la distanza del centro C_1 da tale retta uguale al raggio r_1:

$$t: y = k(x-1) \qquad d(C_1;t) = r_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{|-2k|}{\sqrt{1+k^2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad |2k|^2 = \left(\sqrt{1+k^2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad k^2 = \frac{1}{3}$$

L'equazione dà due soluzioni, una positiva e una negativa. Ragionando a partire dal disegno, posso notare che la retta tangente forma un angolo ottuso con la direzione positiva dell'asse x, perciò:

$$\boldsymbol{t: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)}$$

Per determinare le coordinate del punto Q, posso mettere a sistema l'equazione della retta t con l'equazione della semicirconferenza γ_1, oppure posso determinare l'equazione della retta n, normale alla semicirconferenza passante per il punto di tangenza, e calcolare l'intersezione tra questa retta e la retta tangente. Per determinare l'equazione della retta n, impongo il passaggio per il centro C_1 e la perpendicolarità alla retta t:

$$n: y - 0 = -\frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}}(x+1) \qquad y = \sqrt{3}(x+1)$$

Determino le coordinate di Q:

$$\begin{cases} n \\ t \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \sqrt{3}(x+1) \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \end{cases} \qquad \sqrt{3}(x+1) = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1) \qquad 3x+3 = -x+1 \qquad \boldsymbol{Q\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

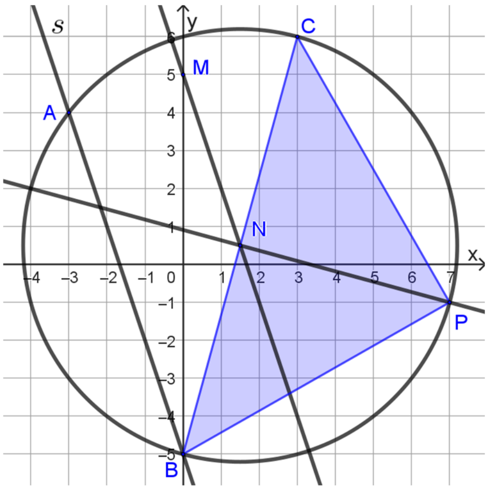
Sostituisco le coordinate dei punti P, Q e A nella condizione di allineamento di tre punti:

$$\frac{x_A - x_P}{x_Q - x_P} = \frac{y_A - y_P}{y_Q - y_P} \quad \Rightarrow \quad \frac{-2-1}{-\frac{1}{2}-1} = \frac{0-\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad -3 : \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-1\right)} \quad \Rightarrow \quad 2 = 2$$

Essendo verificata la condizione di allineamento, **i tre punti sono allineati**.

2. Di un triangolo ABC si sa che:
   A. la retta passante per il punto medio M del lato AC e per il punto medio N del lato BC ha equazione $y = -3x + 5$;
   B. il punto M e il vertice B appartengono all'asse y;
   C. il vertice A ha coordinate $(-3, 4)$.

   Determina le coordinate dei vertici B e C e l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo.
   Dato un punto P, sull'arco BC che non contiene A, determina l'area del triangolo BPC che ha area massima.



Determino facilmente le coordinate di M, usando l'ordinata all'origine della retta congiungente i due punti medi: $M(0, 5)$.

In un triangolo, la retta congiungente i punti medi di due lati (nello specifico M e N) è parallela al terzo lato (AB in questo caso) e congruente alla sua metà (anche se quest'ultimo risultato non è rilevante per il nostro problema). Determino, quindi, l'equazione della retta s passante per A e parallela alla retta data:

$$s: y - 4 = -3\,(x + 3) \qquad y = -3x - 5$$

Posso conoscere ora le coordinate di $\boldsymbol{B(0, -5)}$.

Visto che M è il punto medio del lato AC, posso determinare le coordinate di C:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x_C = 2x_M - x_A = 3 \\ y_C = 2y_M - y_A = 6 \end{cases} \quad \boldsymbol{C(3, 6)}$$

Dal disegno posso intuire che il triangolo ABC sia rettangolo in A e, in effetti:

$$m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{4 - 6}{-3 - 3} = \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \qquad m_{AC} \cdot m_{AB} = -1$$

Un triangolo rettangolo inscritto in una circonferenza è tale per cui la sua ipotenusa coincida con il diametro, perciò il punto medio del lato BC, N, sarà il centro della circonferenza:

$$N = M_{BC} = \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \qquad r = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\sqrt{3^2 + 11^2}}{2} = \frac{\sqrt{130}}{2}$$

Posso determinare l'equazione della circonferenza come luogo geometrico:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{130}{4} \qquad \boldsymbol{x^2 + y^2 - 3x - y - 30 = 0}$$

Perché l'area del triangolo BPC sia massima, P si deve trovare alla massima distanza possibile dal segmento BC, perciò deve appartenere all'asse del segmento BC. Il triangolo BPC che si viene a formare è isoscele e, in quanto inscritto in una semicirconferenza (ho già stabilito che il lato BC è diametro della circonferenza) rettangolo in P, perciò l'area è data da:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot d(P, BC) = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \frac{1}{2}\overline{BC} = r^2 = \left(\frac{\sqrt{130}}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{65}{2}}$$

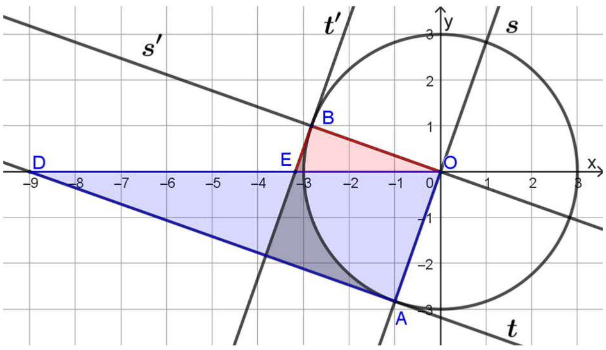
3. Scritta l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ di centro l'origine e raggio 3, siano:
   - A l'intersezione di $\mathcal{C}$ con la retta s di equazione $y = 2\sqrt{2}\,x$ situata nel 3° quadrante;
   - B l'intersezione di $\mathcal{C}$ con la retta s' di equazione $y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x$ situata nel 2° quadrante;
   - t la tangente a $\mathcal{C}$ in A e t' la tangente a $\mathcal{C}$ in B;
   - D ed E le intersezioni di t e t' con l'asse x.

   Dopo aver verificato che s e s' sono perpendicolari, determina:

   A. le equazioni di t e t';

   B. l'area della regione limitata da t, t' e dall'arco AB;

   C. il rapporto tra i perimetri e il rapporto tra le aree dei triangoli DAO e OBE.



Data la circonferenza $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 9$, determino le coordinate dei punti A e B, scegliendo l'ascissa negativa per A, dato che si trova nel terzo quadrante, e l'ordinata positiva per B, che si trova nel secondo quadrante:

$$A: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y = 2x\sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 8x^2 = 9 \\ y = 2x\sqrt{2} \end{cases} \qquad \boldsymbol{A(-1;\ -2\sqrt{2})}$$

$$B: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x = -2y\sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 8y^2 + y^2 = 9 \\ x = -2y\sqrt{2} \end{cases} \qquad \boldsymbol{B(-2\sqrt{2}; 1)}$$

Le due rette date hanno coefficiente angolare:

$$m_s = 2\sqrt{2} \qquad m_{s'} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \qquad m_s \cdot m_{s'} = 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{s \perp s'}$$

A. Determino l'equazione della retta t perpendicolare a s e passante per A, che è quindi tangente alla circonferenza:

$$t: y + 2\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}(x + 1)$$

Determino le coordinate del punto di intersezione con l'asse x, D:

$$D: \begin{cases} y + 2\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}(x + 1) \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}(x + 1) \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8 = -x - 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{D(-9; 0)}$$

Procedo allo stesso modo per t', perpendicolare a s' e passante per B: $t': y - 1 = 2\sqrt{2}\,(x + 2\sqrt{2})$. Determino le coordinate di E:

$$E: \begin{cases} y - 1 = 2x\sqrt{2} + 8 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x\sqrt{2} = -9 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{E\left(-\frac{9}{4}\sqrt{2}; 0\right)}$$

B. Dato che $s \parallel t'$ e $s' \parallel t$, il quadrilatero AOBC è un parallelogramma. Dato che $s \perp t$ e $s' \perp t'$, AOBC è un rettangolo. Dato che AO e BO, lati consecutivi del parallelogrammo, sono congruenti perché raggi, AOBC è un quadrato. L'area richiesta, indicata in grigio nel disegno, è data dalla differenza tra l'area del quadrato AOBC (di lato 3) e il quarto di circonferenza (si tratta di un quarto di circonferenza perché $s \perp s'$, come verificato in precedenza). Perciò:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{AOBC} - \frac{1}{4}\mathcal{C} = 3^2 - \frac{1}{4}(9\pi) = \boldsymbol{9 - \frac{9}{4}\pi}$$

C. I triangoli OBE e OAD sono simili, infatti hanno gli angoli corrispondenti congruenti:
   - entrambi sono triangoli rettangoli (OAD in A e OBE in B)
   - l'angolo AOD è complementare sia dell'angolo ODA (in quanto angoli acuti di un triangolo rettangolo) che dell'angolo EOB, visto che l'angolo AOB è retto, trattandosi dell'angolo interno di un quadrato. Quindi $O\hat{D}A \cong E\hat{O}B$ e $D\hat{O}A \cong O\hat{E}B$.

   Essendo i simili, i due triangoli hanno i lati in proporzione. Non solo, il rapporto di proporzionalità tra i perimetri è lo stesso di quello tra i lati:

$$\frac{2p_{ODA}}{2p_{EOB}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OE}} = \frac{9}{\frac{9}{4}\sqrt{2}} = \boldsymbol{2\sqrt{2}} \qquad \frac{\mathcal{A}_{ODA}}{\mathcal{A}_{EOB}} = \frac{\overline{OD}^2}{\overline{OE}^2} = \left(\frac{\overline{OD}}{\overline{OE}}\right)^2 = \boldsymbol{8}$$