1. Un protone si trova tra due piani conduttori paralleli posti nel vuoto. La differenza di potenziale tra i due piani è di 450 V. Il protone è lasciato libero in prossimità del piano positivo. Qual è la velocità del protone quando raggiunge il piano negativo?

$$q = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,C \qquad m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg \qquad V_A - V_B = 450\,V \qquad v_B?$$

Applico il principio di conservazione dell'energia, considerando come punto di partenza il punto A, dove la velocità del protone è nulla, e come punto di arrivo il punto B, dove il potenziale è nullo, trattandosi del piano negativo. In questo caso, applicando il principio di conservazione ottengo la relazione:

$$U_A + K_A = U_B + K_B \quad \Rightarrow \quad K_B = U_A$$

Dalla relazione tra potenziale ed energia potenziale e dalla definizione di energia cinetica, ottengo:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = qV_A \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2q\frac{V_A - V_B}{m}} = \mathbf{2{,}9 \cdot 10^5\ m/s}$$

2. Una sfera conduttrice uniformemente carica di raggio $1{,}5\ m$ ha una densità superficiale di carica di $7{,}8\ \mu C/m^2$.
   A. Qual è la carica sulla sfera?
   B. Determina il flusso del campo elettrico uscente dalla superficie della sfera.
   C. Determina il campo elettrico a $0{,}55\ m$ dal centro della sfera e a $5{,}5\ m$ dal centro della sfera.

$$R = 1{,}5\,m \qquad \sigma = 7{,}8\,\mu C/m^2 \qquad Q? \qquad \phi? \qquad R_1 = 0{,}55\,m \qquad E_1? \qquad R_2 = 5{,}5\,m \qquad E_2?$$

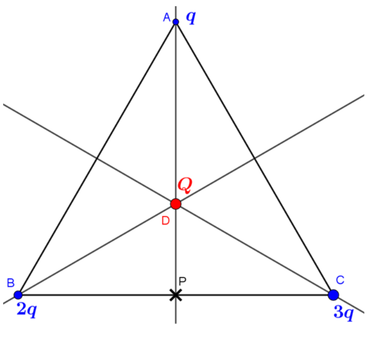
A. Per definizione, la densità superficiale di carica è il rapporto tra la carica totale presente sulla sfera e la sua superficie, perciò:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} \quad \Rightarrow \quad Q = 4\,\pi R^2 \sigma = \mathbf{2{,}2 \cdot 10^{-4}\ C}$$

B. Applico il teorema di Gauss per calcolare il flusso: $\phi = \frac{Q}{\varepsilon_o} = \mathbf{2{,}5 \cdot 10^7 \frac{N}{C} m^2}$.

C. $0{,}55\ m < 1{,}5\ m$, perciò è richiesto il campo elettrico all'interno della sfera. Trattandosi di una sfera conduttrice e dato che la carica in eccesso si distribuisce sulla superficie: $\mathbf{E_1 = 0\ N/C}$. Per calcolare, invece, il campo elettrico in un punto lontano dalla superficie, tratto la sfera conduttrice come se fosse una carica puntiforme: $E_2 = k\frac{Q}{R_2^2} = \mathbf{6{,}6 \cdot 10^4\ N/C}$.

3. Tre cariche puntiformi di intensità, rispettivamente, q, $2q$ e $3q$ sono disposte nei vertici un triangolo equilatero di lato L. Determina il valore di una carica Q da inserire nel baricentro, perché il potenziale calcolato nel punto medio tra le due cariche date di valore maggiore risulti nullo.



Nominati con A, B e C i vertici del triangolo, con D il baricentro e con P il punto medio della base, calcolo le seguenti distanze:

$$\overline{PB} = \overline{PC} = \frac{L}{2} \qquad \overline{PA} = \overline{AC}\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}L$$

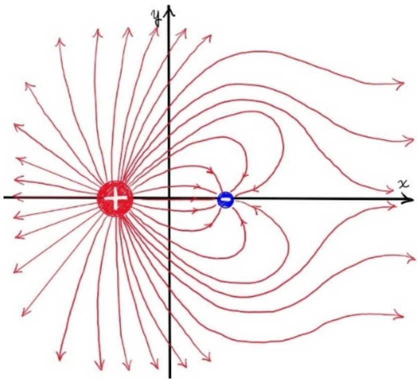
In un triangolo equilatero, le mediane coincidono con le altezze, e dato che il baricentro divide in due parti la mediana e quella che contiene il vertice è doppia dell'altra, ottengo:

$$\overline{PD} = \frac{1}{3}\overline{PA} = \frac{\sqrt{3}}{6}L$$

Posso calcolare il potenziale e porlo uguale a zero per determinare la carica Q:

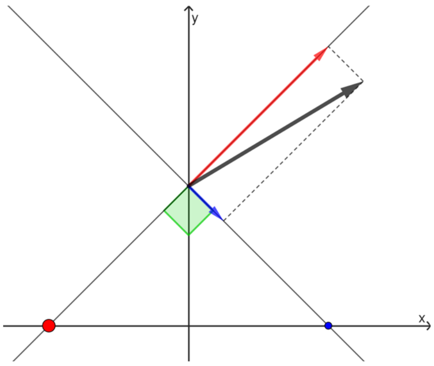
$$k\frac{q}{\overline{PA}} + k\frac{2q}{\overline{PB}} + k\frac{3q}{\overline{PC}} + k\frac{Q}{\overline{PD}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2q}{L\sqrt{3}} + \frac{4q}{L} + \frac{6q}{L} + \frac{6Q}{L\sqrt{3}} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = -\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{2q}{\sqrt{3}} + 4q + 6q\right) = \mathbf{-\frac{q}{3}(1 + 5\sqrt{3})}$$

4. Siano date due cariche in un piano cartesiano: $+4q$ situata nel punto $(-d, 0)$ e $-q$ nel punto, simmetrico rispetto all'origine, $(d, 0)$.
   A. Rappresenta le due cariche nel piano cartesiano e rappresenta le linee di forza del campo elettrico da esse generato.
   B. Determina il modulo del campo elettrico nel punto $P(0, d)$, dopo averlo determinato graficamente (rispetta le proporzioni nella rappresentazione)
   C. Determina l'ascissa dei punti lungo l'asse x nei quali il potenziale è nullo.
   D. Determina l'espressione del potenziale $V(y)$ in un punto di generiche coordinate $(0, y)$.



A. Nel rappresentare le linee di forza del campo elettrico, bisogna ricordare che:
1. Le linee di forza del campo elettrico sono sempre uscenti dalle cariche positive ed entranti in quelle negative
2. Il numero di linee di forza è proporzionale all'intensità del campo elettrico
3. Una linea di forza è tale che il vettore campo elettrico in un punto è tangente alla linea di forza in quel punto
4. Le linee di forza del campo elettrico partono sempre da una carica positiva e terminano in una negativa e non cominciano o terminano mai in un punto dello spazio privo di cariche
5. Il numero di linee di forza che escono da una carica positiva e che giungono a una negativa è proporzionale alla grandezza della carica
6. Le linee di forza di un campo elettrico non si intersecano mai

La fisica di Cutnell e Johnson – vol. 2 – Zanichelli

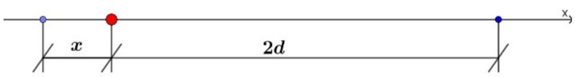


B. Il punto indicato sull'asse y è equidistante dalle due cariche, perciò il vettore del campo elettrico generato dalle singole cariche è proporzionale al loro valore. Il vettore campo elettrico prodotto da $+4q$ avrà modulo quadruplo del vettore campo elettrico prodotto da $-q$. I due vettori, inoltre, sono perpendicolari, perciò, per determinare il modulo del vettore risultante, applico il teorema di Pitagora:

$$E_{4q} = k\frac{4q}{d^2 + d^2} = \frac{2kq}{d^2} \qquad E_{-q} = k\frac{q}{d^2 + d^2} = \frac{kq}{2d^2}$$

$$E = \sqrt{E_{4q}^2 + E_{-q}^2} = \frac{kq}{d^2}\sqrt{4 + \frac{1}{4}} = \boldsymbol{\frac{kq}{2d^2}\sqrt{17}}$$

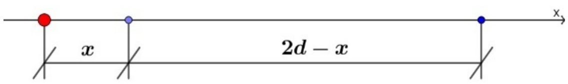
C. Consideriamo tre diversi casi, andando a determinare la somma dei due potenziali dovuti alle singole cariche:



Caso in cui l'eventuale punto si trovi a sinistra della carica positiva e indico con x la distanza dalla carica positiva e con $2d + x$ la distanza da quella negativa:

$$V = k\frac{4q}{x} + k\frac{-q}{2d + x} = 0 \qquad 8d + 4x - x = 0 \qquad x = -\frac{8}{3}d$$

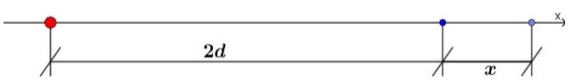
Trattandosi di una distanza, non può essere negativa, perciò il risultato non è accettabile.



Caso in cui l'eventuale punto si trovi tra le due cariche e indico con x la distanza dalla carica positiva e con $2d - x$ la distanza da quella negativa:

$$V = k\frac{4q}{x} + k\frac{-q}{2d - x} = 0 \qquad 8d - 4x - x = 0 \qquad x = \frac{8}{5}d$$

Perciò l'ascissa richiesta è $-d + \frac{8}{5}d = \boldsymbol{\frac{3}{5}d}$



Caso in cui l'eventuale punto si trovi a destra della carica negativa e indico con x la distanza dalla carica negativa e con $2d + x$ la distanza da quella positiva:

$$V = k\frac{4q}{2d + x} + k\frac{-q}{x} = 0 \qquad 4x - 2d - x = 0 \qquad x = \frac{2}{3}d$$

Perciò l'ascissa richiesta è $d + \frac{2}{3}d = \boldsymbol{\frac{5}{3}d}$

D. Considero un generico punto di coordinate $(0, y)$, equidistante dalle due cariche date:

$$V(y) = k\frac{4q}{\sqrt{d^2 + y^2}} + k\frac{-q}{\sqrt{d^2 + y^2}} = \boldsymbol{\frac{3kq}{\sqrt{d^2 + y^2}}}$$