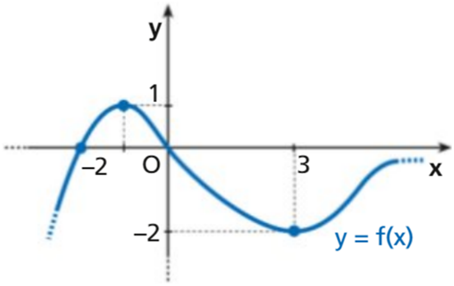
1. Considera il grafico della funzione $f(x)$ riportato nella figura 1. Determina:

$f(-1) =$ ______ $\quad 2^{f(-2)} =$ ______ $\quad 3^{f(3)} =$ ______ $\quad 4^{f(0)} =$ ______

Risolvi le equazioni e disequazioni seguenti:

A. $2^x - 4^{f(0)} = 2^{f(-1)}$

B. $2^{f(x)} > 1$



$f(-1) = \mathbf{1} \qquad 2^{f(-2)} = 2^0 = \mathbf{1} \qquad 3^{f(3)} = 3^{-2} = \mathbf{\frac{1}{9}} \qquad 4^{f(0)} = 4^0 = \mathbf{1}$

A. $2^x - 4^0 = 2^1 \qquad 2^x = 3 \qquad x = \mathbf{\log_2 3}$

B. $2^{f(x)} > 2^0 \qquad f(x) > 0 \qquad \mathbf{-2 < x < 0}$

2. Determina il dominio di **una** delle seguenti funzioni, studiane il segno e determinane gli eventuali zeri: $y = \frac{\sqrt{x-2}}{\ln(\ln x)}$, $y = \frac{\sqrt{-\ln x^2}}{\sqrt{1-e^{2x-1}}}$

$$y = \frac{\sqrt{x-2}}{\ln(\ln x)}$$

Dominio: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ \ln(\ln x) \neq 0 \\ \ln x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ \ln x \neq 1 \\ x > 1 \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq e \\ x > 1 \\ x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq e \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x \geq 2 \quad \wedge \quad x \neq e}$

$\boldsymbol{f(x) > 0}$: $\quad \frac{\sqrt{x-2}}{\ln(\ln x)} > 0 \qquad \begin{array}{l} N > 0: \ \forall x \in D - \{2\} \\ D > 0: \ \ln\ln x > 0 \quad \ln x > 1 \quad x > e \end{array} \qquad \boldsymbol{x > e}$

$\boldsymbol{f(x) = 0}$: $\quad \frac{\sqrt{x-2}}{\ln(\ln x)} = 0 \qquad \boldsymbol{x = 2}$

$$y = \frac{\sqrt{-\ln x^2}}{\sqrt{1-e^{2x-1}}}$$

Dominio: $\begin{cases} -\ln x^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \\ 1 - e^{2x-1} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x^2 \leq 0 \\ x \neq 0 \\ e^{2x-1} < e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq 1 \\ x \neq 0 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \neq 0 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{-1 \leq x < \frac{1}{2} \quad \wedge \quad x \neq 0}$

$\boldsymbol{f(x) > 0}$: $\quad \frac{\sqrt{-\ln x^2}}{\sqrt{1-e^{2x-1}}} > 0 \qquad \boldsymbol{\forall x \in D - \{-1\}} \qquad \boldsymbol{f(x) = 0}$: $\quad \frac{\sqrt{-\ln x^2}}{\sqrt{1-e^{2x-1}}} = 0 \qquad \ln x^2 = 0 \qquad \boldsymbol{x = -1}$

3. Risolvi la disequazione $2 - 2^{x-1} > -\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ usando il metodo grafico.

$$2^{x-1} - 2 < \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$$

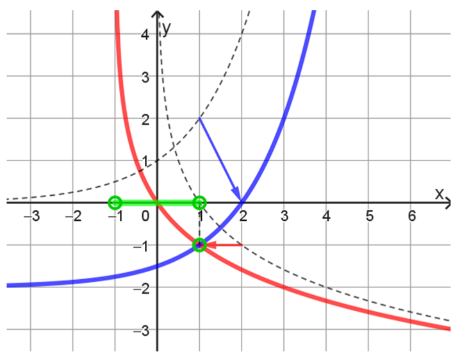
Rappresento le funzioni:

$y = 2^{x-1} - 2$ ottenuta da una traslazione di vettore $(1, -2)$ della funzione $y = 2^x$

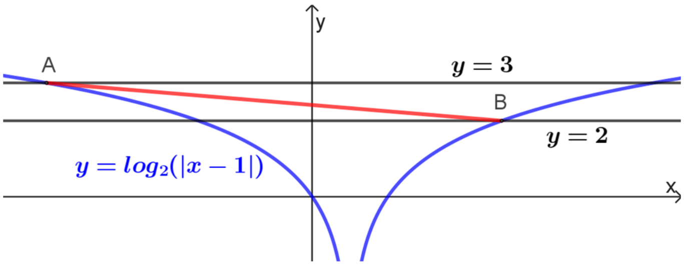
$y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ ottenuta da una traslazione di vettore $(-1, 0)$ della funzione

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

$\boldsymbol{-1 < x < 1}$



4. Trova le coordinate di A e B nella figura 2 e calcola la lunghezza del segmento AB.



Di A e di B conosco l'ordinata, perciò posso determinare l'ascissa:

$$\log_2 |x-1| = 3 \quad \Rightarrow \quad |x-1| = 8 \quad \Rightarrow \quad x-1 = \pm 8$$

La soluzione positiva non è accettabile, secondo quanto riportato nel grafico, perciò il punto ha coordinate: $A(-7; 3)$

$$\log_2 |x-1| = 2 \quad \Rightarrow \quad |x-1| = 4 \quad \Rightarrow \quad x-1 = \pm 4$$

La soluzione negativa non è accettabile, secondo quanto riportato nel grafico, perciò il punto ha coordinate: $B(5; 2)$

Determino la lunghezza del segmento:

$$\overline{AB} = \sqrt{(5+7)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{144+1} = \boldsymbol{\sqrt{145}}$$

5. Quando togliamo il latte dal frigorifero, normalmente la sua temperatura è di circa $4{,}5°C$. Un'ora dopo la sua temperatura è di circa $10°C$, mentre la temperatura ambiente è di $21°C$. L'andamento della temperatura in funzione del tempo t segue la legge di raffreddamento di Newton:

$$T(t) = T_a + (T_o - T_a)\, e^{-kt}$$

Dove T_o indica la temperatura iniziale, T_a quella ambiente e il tempo t è misurato in ore.

A. Determina il valore della costante k e scrivi la formula risultante.
B. Qual è la temperatura del latte dopo 2 ore?

A. Sostituisco i dati noti nella formula di raffreddamento di Newton per determinare la costante k:

$$10 = 21 + (4{,}5 - 21)\, e^{-k} \quad \Rightarrow \quad e^{-k} = \frac{11}{16{,}5} \quad \Rightarrow \quad \ln e^{-k} = \ln \frac{11}{16{,}5} \quad \Rightarrow \quad -k = \ln \frac{11}{16{,}5} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k = -\ln \frac{2}{3}}$$

Sostituendo il valore trovato nella formula di raffreddamento, ottengo la formula risultante per questa situazione specifica:

$$T(t) = 21 - 16{,}5 \cdot e^{\ln\frac{2}{3}t} \quad \Rightarrow \quad T(t) = 21 - 16{,}5 \cdot \left(e^{\ln\frac{2}{3}}\right)^t \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{T(t) = 21 - 16{,}5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t}$$

B. Per determinare la temperatura del latte dopo 2 ore, sostituisco alla variabile il valore 2:

$$T(2) = 21 - 16{,}5 \cdot \left(\frac{11}{16{,}5}\right)^2 = 13{,}7$$

La temperatura raggiunta dopo 2 ore è di $\boldsymbol{13{,}7°C}$.

6. La pressione atmosferica, esercitata dal peso della colonna d'aria sovrastante il punto in cui viene effettuata la misura, diminuisce all'aumentare dell'altitudine. La posizione verticale di un aereo può essere così determinata mediante l'altimetro a pressione, che si basa proprio sulla variazione della pressione atmosferica in funzione dell'altitudine. Al livello del mare la pressione atmosferica è di circa $14{,}7\ psi$ (*pounds for square inch*, unità di misura anglosassone usata anche in campo aeronautico). L'andamento della pressione P in funzione dell'altitudine h è espresso dalla funzione $P = 14{,}7 \cdot 10^{-0{,}000018h}$ (P misura in psi; h in *feet*, «piedi», simbolo ft).

A. Qual è l'altezza di volo di un comune aereo se l'altimetro a pressione registra $13{,}82\ psi$?
B. Quale pressione registra l'altimetro se un aereo si trova a viaggiare a un'altitudine di $10\ 000\ ft$?

A. Sostituisco il valore noto della pressione nella formula indicata:

$$13{,}82 = 14{,}7 \cdot 10^{-0{,}000018h} \quad \Rightarrow \quad 10^{0{,}000018h} = \frac{14{,}7}{13{,}82} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{log\,\frac{14{,}7}{13{,}82}}{0{,}000018\,\frac{1}{ft}} = \boldsymbol{1489\ ft}$$

B. Sostituisco 10000 alla h:

$$P = 14{,}7\ psi \cdot 10^{-0{,}000018 \cdot 10\ 0000} = \boldsymbol{9{,}71\ psi}$$

7. $\ln^4 x - 5\ln^2 x + 4 \geq 0$

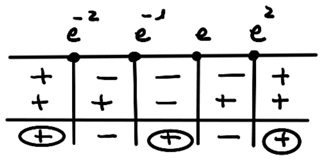
Posso scomporre il polinomio in fattori, in modo da rendere più semplice lo svolgimento:

$$(\ln^2 x - 4)(\ln^2 x - 1) \geq 0$$

Pongo i due fattori maggiori o uguali a zero e faccio lo studio dei segni:

$IF \geq 0$: $\ln^2 x - 4 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x \leq -2 \quad \vee \quad \ln x \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x \leq e^{-2} \quad \vee \quad x \geq e^2$

$IIF \geq 0$: $\ln^2 x - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x \leq -1 \quad \vee \quad \ln x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x \leq e^{-1} \quad \vee \quad x \geq e$

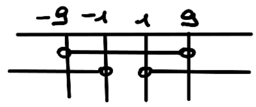


Senza dimenticare le condizioni di esistenza ($x < 0$), la soluzione diventa:

$$\boldsymbol{0 < x \leq e^{-2} \quad \vee \quad e^{-1} \leq x \leq e \quad \vee \quad x \geq e^2}$$

8. $\log\left(\sqrt{|x|} - 1\right) < \log 2$

$$\begin{cases} \sqrt{|x|} - 1 < 2 \\ \sqrt{|x|} - 1 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{|x|} < 3 \\ \sqrt{|x|} > 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} |x| < 9 \\ |x| > 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -9 < x < 9 \\ x < -1 \quad \vee \quad x > 1 \end{cases}$$



$$\boldsymbol{-9 < x < -1 \quad \vee \quad 1 < x < 9}$$

9. $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 \leq 0$

Pongo $3^x = y$:

$3y^2 - 10y + 3 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad (3y-1)(y-3) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} \leq y \leq 3 \quad \Rightarrow \quad 3^{-1} \leq 3^x \leq 3^1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{-1 \leq x \leq 1}$

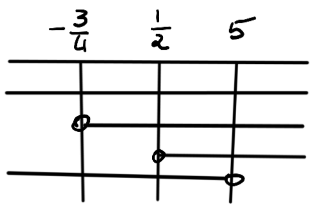
10. $|3^{2x} - 3^x| < 2$

$$\begin{cases} 3^{2x} - 3^x > -2 \\ 3^{2x} - 3^x < 2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \Delta < 0 \\ \end{matrix} \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ (3^x - 2)(3^x + 1) < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 3^x - 2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x < \log_3 2}$$

11. $\log(4x+3) - \log(2x-1) > \log(5-x)$

$$\log(4x+3) > \log(2x-1) + \log(5-x) \quad \Rightarrow \quad \log(4x+3) > \log\big((2x-1)(5-x)\big)$$

$$\begin{cases} 4x + 3 > -2x^2 + 11x - 5 \\ 4x + 3 > 0 \\ 2x - 1 > 0 \\ 5 - x > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 - 7x + 8 > 0 \\ x > -\frac{3}{4} \\ x > \frac{1}{2} \\ x < 5 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \Delta < 0 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x > -\frac{3}{4} \\ x > \frac{1}{2} \\ x < 5 \end{cases}$$

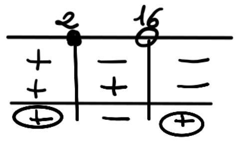


$$\boldsymbol{\frac{1}{2} < x < 5}$$

12. $\dfrac{\log_2(3-x)}{4+\log_{\frac{1}{2}} x} \geq 0$

$N \geq 0$: $\log_2(3-x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 3-x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x \leq 2$

$D > 0$: $4+\log_{\frac{1}{2}} x > 0 \quad \Rightarrow \quad \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 16 \quad \Rightarrow \quad x < 16$



$x \leq 2 \quad \vee \quad x > 16$

$\begin{cases} x \leq 2 \quad \vee \quad x > 16 \\ 3-x > 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \leq 2 \quad \vee \quad x > 16 \\ x < 3 \\ x > 0 \end{cases}$ $\qquad \boldsymbol{0 < x \leq 2}$

13. $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 2 \\ \log_2 x - 2\log_2 y = 3 \end{cases}$

$C.E.: \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$$-\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 2 \\ \log_2 x - 2\log_2 y = 3 \end{cases} \atop \overline{\log_2 y = -1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 y = -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{x = 2} \\ \boldsymbol{y = \frac{1}{2}} \end{cases}$$

14. $\sqrt{1+\log_{\sqrt{2}} x} = 3$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1+\log_{\sqrt{2}} x \geq 0 \\ 1+\log_{\sqrt{2}} x = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_{\sqrt{2}} x = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = \left(\sqrt{2}\right)^8 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x = 16 \ \ acc.}$$

15. $\dfrac{4}{\log_9 x} - \left(2 - \dfrac{3}{\log_9 x}\right) - 2\left(1 - \dfrac{1}{\log_9 x}\right) = 14$

$C.E.: x > 0 \quad \wedge \quad \log_9 x \neq 0$

Pongo $\log_9 x = y$:

$$\frac{4}{y} - 2 + \frac{3}{y} - 2 + \frac{2}{y} - 14 = 0 \qquad \frac{9}{y} = 18 \qquad y = \frac{1}{2}$$

$$\log_9 x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x = 3 \ \ acc.}$$