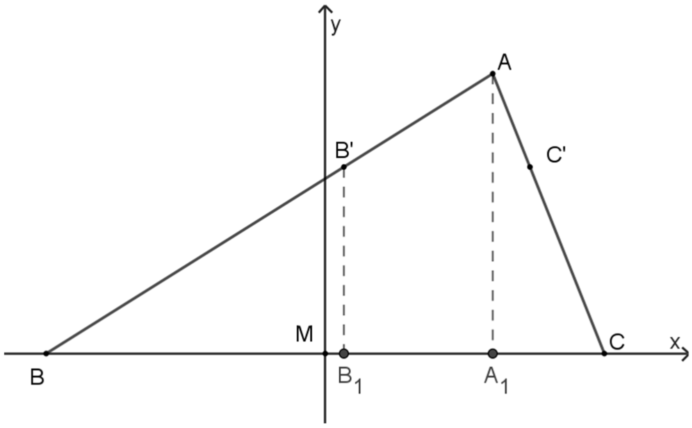
1. Dato un triangolo ABC, con vertici $B(-b,0)$, $C(b,0)$ $(b>0)$ e $A(a_x,a_y)$ posto per comodità nel primo quadrante, sia M il punto medio del lato BC e siano B' e C' due punti, rispettivamente, sul lato AB e sul lato AC, in modo tale che $\overline{AB'}=\frac{1}{3}\,\overline{AB}$ e $\overline{AC'}=\frac{1}{3}\,\overline{AC}$. Dimostrare che, se i segmenti $\overline{MB'}$ e $\overline{MC'}$ sono tra loro congruenti, allora lo sono anche i lati AB e AC.

Esame di Stato 2025, sessione ordinaria, quesito 1



Il punto medio di BC coincide con l'origine del piano cartesiano. Le coordinate dei punti B' e C' possono essere determinate con il teorema di Talete: comincio con B' e con la sua ascissa, tracciando le proiezioni di B' e A sull'asse x, indicate con B_1 e A_1 rispettivamente. Sapendo che $\overline{AB'}=\frac{1}{3}\,\overline{AB}$, per il teorema di Talete, dato che $B'B_1 \parallel AA_1$, $\overline{A_1B_1}=\frac{1}{3}\,\overline{A_1B}$ ovvero $\overline{B_1B}=2\,\overline{A_1B_1}$, perciò, indicata con x l'ascissa di B', ottengo:

$$x+b=2(a_x-x) \qquad x=\frac{2a_x-b}{3}$$

Analogamente per l'ascissa di C':

$$\overline{C_1C}=2\,\overline{A_1C_1} \quad \Rightarrow \quad b-x=2(x-a_x) \qquad x=\frac{b+2a_x}{3}$$

Per l'ordinata (che è uguale per B' e C'), indicando con B_2, C_2, A_2 le proiezioni di, rispettivamente, B', C' e A sull'asse y, ottengo:

$$\overline{B_2M}=2\,\overline{A_2B_2} \quad \Rightarrow \quad y-0=2(a_y-y) \qquad y=\frac{2a_y}{3}$$

Le coordinate di B' e C' sono: $B'\left(\frac{2a_x-b}{3};\frac{2a_y}{3}\right)$ e $C'\left(\frac{b+2a_x}{3};\frac{2a_y}{3}\right)$. Impongo che i segmenti MB' e MC' siano congruenti:

$$\overline{MB'}^2=\overline{MC'}^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2a_x-b}{3}-0\right)^2+\left(\frac{2a_y}{3}-0\right)^2=\left(\frac{b+2a_x}{3}-0\right)^2+\left(\frac{2a_y}{3}-0\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{2a_x-b}{3}\right|=\left|\frac{b+2a_x}{3}\right|$$

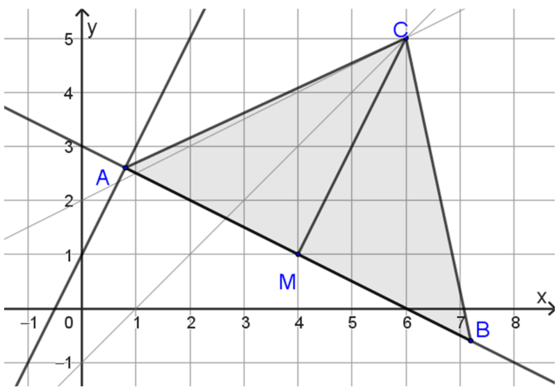
Ottengo due equazioni:

$$2a_x-b=b+2a_x \quad \Rightarrow \quad b=0 \quad non\ accettabile$$
$$2a_x-b=-b-2a_x \quad \Rightarrow \quad a_x=0$$

Il punto A si trova sull'asse y, che è l'asse del segmento BC, perciò il triangolo ABC è un triangolo isoscele.

2. Un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, è tale che:
- C è il punto di intersezione delle rette di equazioni $x-y-1=0$ e $x-2y+4=0$;
- il punto medio M di AB ha coordinate $(4,1)$;
- il vertice A del triangolo ha ordinata che supera di 1 il doppio dell'ascissa.

Determina le coordinate dei vertici del triangolo ABC.



Determino le coordinate del vertice C, mettendo a sistema le equazioni delle due rette:

$$\begin{cases} x-y-1=0 \\ x-2y+4=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=6 \\ y=5 \end{cases} \qquad \boldsymbol{C(6,5)}$$

In un triangolo isoscele, la mediana relativa alla base è anche altezza, perciò posso determinare la retta del lato AB, sapendo che è perpendicolare alla retta CM e passa per M:

$$m_{CM}=\frac{y_M-y_C}{x_M-x_C}=\frac{1-5}{4-6}=2 \qquad m_{AB}=-\frac{1}{m_{CM}}=-\frac{1}{2}$$

$$AB: y-1=-\frac{1}{2}(x-4) \qquad y=-\frac{1}{2}x+3$$

Il vertice A del triangolo ha ordinata che supera di 1 il doppio dell'ascissa, ovvero si trova sulla retta: $y = 1 + 2x$. Mettendo a sistema questa retta con quella appena determinata, determino le coordinate di A:

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 1 = -\frac{1}{2}x + 3 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{13}{5} \end{cases} \qquad \boldsymbol{A\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right)}$$

Il vertice B è simmetrico di A rispetto a M, perciò:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_B = 2x_M - x_A = \frac{36}{5} \\ y_B = 2y_M - y_A = -\frac{3}{5} \end{cases} \qquad \boldsymbol{B\left(\frac{36}{5}, -\frac{3}{5}\right)}$$

3. Data la parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 2k + 3$, determina per quale valore di k interseca l'asse x in due punti distinti A e B, tali che il prodotto delle ascisse di A e di B è uguale a -9.

Determino le intersezioni della parabola con l'asse x:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2k + 3 \\ y = 0 \end{cases} \qquad x^2 - 2x + 2k + 3 = 0$$

Perché le intersezioni siano distinte, $\frac{\Delta}{4} > 0$ nell'equazione risolvente: $\frac{\Delta}{4} = 1 - 2k - 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad k < -1.$

La risolvente darà come risultato le ascisse dei due punti di intersezione con l'asse x, e perché il prodotto di tali ascisse sia uguale a -9, considero l'equazione di secondo grado in cui il prodotto delle radici è dato dal rapporto tra il termine noto e il coefficiente del termine di secondo grado:

$$2k + 3 = -9 \qquad \boldsymbol{k = -6}$$

Accettabile rispetto alla condizione posta con $\frac{\Delta}{4} > 0$.

4. Trova l'equazione della circonferenza tangente nell'origine alla bisettrice del secondo e quarto quadrante e con il centro di ordinata 2. Scrivi poi l'equazione della circonferenza concentrica che passa per $P(5;0)$ e calcola il rapporto tra le aree dei due cerchi.

Considero il fascio di circonferenze tangenti nell'origine alla bisettrice di secondo e quarto quadrante: $x^2 + y^2 + k(y + x) = 0$ e, sapendo che il centro ha ordinata 2, $k = -4$, quindi l'equazione è: $\boldsymbol{x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0}$.

La circonferenza concentrica avrà centro, come quella precedente, $C(2,2)$ e, avendo raggio $\overline{CP}$, ha equazione:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = (5-2)^2 + (0-2)^2 \qquad \boldsymbol{x^2 + y^2 - 4x - 4y - 5 = 0}$$

Il rapporto tra le aree è dato da:

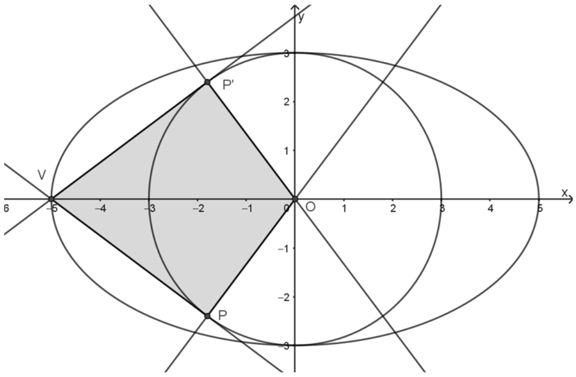
$$\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{\overline{CO}^2}{\overline{CP}^2} = \frac{2^2 + 2^2}{3^2 + 2^2} = \boldsymbol{\frac{8}{13}}$$

5. Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, scrivi le equazioni delle rette passanti per il vertice V di ascissa negativa e che distano 3 dal centro dell'ellisse. Detti P e P' i punti di intersezione delle rette trovate con le loro perpendicolari passanti per il centro dell'ellisse, calcola l'area del quadrilatero VP'OP.

Il vertice V di ascissa negativa dell'ellisse è $V(-5,0)$. Il fascio di rette con centro in V ha equazione: $y = k(x+5)$. Pongo la distanza del centro dell'ellisse, l'origine del sistema di riferimento, dalla generica retta del fascio uguale a 3:

$$\frac{|5k|}{\sqrt{1+k^2}} = 3 \quad \Rightarrow \quad 25k^2 = 9 + 9k^2 \quad \Rightarrow \quad 16k^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad k^2 = \frac{9}{16} \quad \Rightarrow \quad k = \pm\frac{3}{4}$$

Le rette passanti per V con distanza dall'origine uguale a 3 hanno equazione: $\boldsymbol{y = \pm\frac{3}{4}(x+5)}$.



Le rette perpendicolari a quelle appena determinate e passanti per il centro dell'origine (ovvero per l'origine del sistema di riferimento) hanno equazione: $y = \mp\frac{4}{3}x$ e posso determinare le coordinate dei punti P e P'.

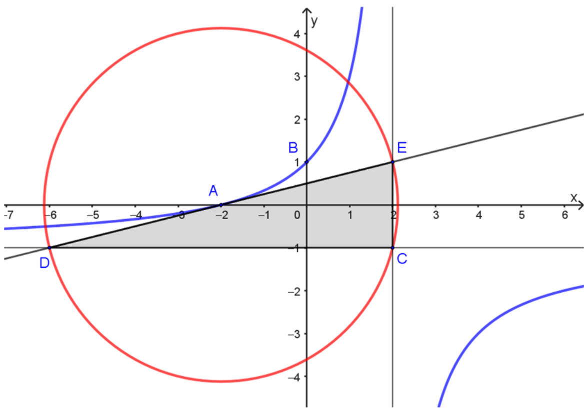
$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}(x+5) \\ y = -\frac{4}{3}x \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{3}{4}(x+5) = -\frac{4}{3}x \\ y = -\frac{4}{3}x \end{cases} \qquad P'\left(-\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}(x+5) \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{3}{4}(x+5) = -\frac{4}{3}x \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases} \qquad P\left(-\frac{9}{5}, -\frac{12}{5}\right)$$

Il quadrilatero è formato da due triangoli rettangoli congruenti e simmetrici rispetto all'ipotenusa, OP'V e OPV. Nel caso del triangolo OP'V, la base è OV e l'altezza relativa a OV è l'ordinata di P', perciò:

$$\mathcal{A} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{OV} \cdot y_{P'} = 5 \cdot \frac{12}{5} = \mathbf{12}$$

6. Per quali valori dei coefficienti a, b, c, d l'iperbole $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ha centro $C(2, -1)$ e passa per $B(0, 1)$? Considerata l'intersezione con l'asse x, trova l'equazione della tangente t in tale punto. Detti D ed E i punti di intersezione fra t e gli asintoti, calcola l'area del triangolo ECD e l'equazione della circonferenza a esso circoscritta.



Il centro della funzione omografica ha coordinate generiche $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$, perciò:

$$\begin{matrix} x_C \\ y_C \\ B \end{matrix} \begin{cases} -\frac{d}{c} = 2 \\ \frac{a}{c} = -1 \\ \frac{b}{d} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = -2c \\ a = -c \\ b = -2c \end{cases} \qquad y = \frac{-cx - 2c}{cx - 2c} \qquad \boldsymbol{y = \frac{x+2}{2-x}}$$

Determino l'intersezione della funzione con l'asse x:

$$\begin{cases} y = \frac{x+2}{2-x} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x+2}{2-x} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad A(-2, 0)$$

Con la formula di sdoppiamento, determino l'equazione della tangente:

$$cxy + dy = ax + b \qquad c\frac{x_A y + x y_A}{2} + d\frac{y + y_A}{2} = a\frac{x + x_A}{2} + b$$

$$2y - xy = x + 2 \qquad 2\frac{y}{2} - \frac{-2y+0}{2} = \frac{x-2}{2} + 2 \qquad 2y + 2y = x - 2 + 4 \qquad t\colon \boldsymbol{x - 4y + 2 = 0}$$

Determino le coordinate di D ed E, dati gli asintoti $x = 2$ e $y = -1$:

$$\begin{cases} x - 4y + 2 = 0 \\ y = -1 \end{cases} \qquad D(-6, -1) \qquad \begin{cases} x - 4y + 2 = 0 \\ x = 2 \end{cases} \qquad E(2, 1)$$

Il triangolo ECD è retto in C (dato che gli asintoti della funzione omografica sono perpendicolari tra loro), perciò l'area è data da:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\overline{EC} \cdot \overline{DC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 = \mathbf{8}$$

Trattandosi di un triangolo rettangolo, la circonferenza circoscritta ha per diametro l'ipotenusa, perciò ha centro nel punto medio dell'ipotenusa ED e raggio pari a metà dell'ipotenusa:

$$M_{ED}(-2, 0) \qquad (x+2)^2 + (y-0)^2 = (-6+2)^2 + (-1-0)^2 \qquad \boldsymbol{x^2 + y^2 + 4x - 13 = 0}$$

7. Un'epidemia si sta diffondendo in un'isola e il numero dei casi cresce esponenzialmente. All'inizio dell'epidemia c'erano 10 casi e il numero totale dei casi triplica ogni 14 giorni.
   A. Scrivi la formula per $E(t)$, il numero totale di casi dopo t giorni dall'inizio dell'epidemia.
   B. Qual è l'aumento percentuale tra il giorno 5 e il giorno 19?

   A. La legge dell'epidemia ha la forma: $E(t) = Cb^t$. C è il numero di casi all'inizio dell'epidemia, con $t = 0$, perciò $C = 10$. Sapendo, poi, che il numero dei casi triplica ogni 14 giorni:

$$E(0) = C \qquad E(14) = Cb^{14} \qquad E(14) = 3E(0) \quad \Rightarrow \quad Cb^{14} = 3C \quad \Rightarrow \quad b^{14} = 3 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt[14]{3}$$

La legge diventa:

$$E(t) = 10 \cdot \left(3^{\frac{1}{14}}\right)^t \qquad \boldsymbol{E(t) = 10 \cdot 3^{\frac{t}{14}}}$$

   B. Determino l'aumento percentuale:

$$\frac{E(19) - E(5)}{E(5)} = \frac{10 \cdot 3^{\frac{19}{14}} - 10 \cdot 3^{\frac{5}{14}}}{10 \cdot 3^{\frac{5}{14}}} = 200\%$$

Com'era prevedibile, visto che il numero di casi triplica ogni 14 giorni.

8. $9^x - 3^{2+x} - 3^{x+\frac{1}{2}} + 9\sqrt{3} \geq 0$

$$9^x - 3^x\left(9 + \sqrt{3}\right) + 9\sqrt{3} \geq 0 \qquad Pongo\ y = 3^x$$

$$y^2 - y\left(9 + \sqrt{3}\right) + 9\sqrt{3} \geq 0 \qquad y(y-9) - \sqrt{3}\,(y-9) \geq 0 \qquad (y-9)\left(y - \sqrt{3}\right) \geq 0$$

$$y \leq \sqrt{3} \quad \vee \quad y \geq 9 \quad \Rightarrow \quad 3^x \leq 3^{\frac{1}{2}} \quad \vee \quad 3^x \geq 3^2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x \leq \frac{1}{2}} \quad \vee \quad \boldsymbol{x \geq 2}$$

9. $\log_5(x+3) < \log_{25}(x^2 + 2x)$

$$\log_5(x+3) < \frac{\log_5(x^2+2x)}{\log_5 25} \qquad 2\ \log_5(x+3) < \log_5(x^2+2x)$$

$$\begin{cases} x + 3 > 0 \\ x^2 + 2x > 0 \\ (x+3)^2 < x^2 + 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -3 \\ x < -2 \quad \vee \quad x > 0 \\ x < -\dfrac{9}{4} \end{cases} \qquad \boldsymbol{-3 < x < -\frac{9}{4}}$$