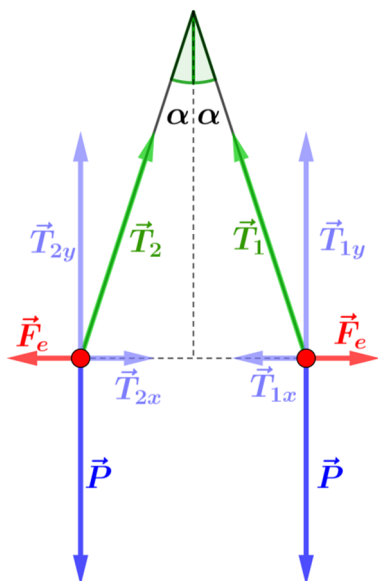


1. Due sferette identiche di massa 50 mg cariche sono appese a due fili di lunghezza 10 cm . All'equilibrio i due fili formano un angolo di 36° . Determina l'intensità della carica presente sulle sferette.



$$m = 50\text{ mg} \quad L = 0,10\text{ m} \quad 2\alpha = 36^\circ \quad q_1 = q_2 = q \quad q?$$

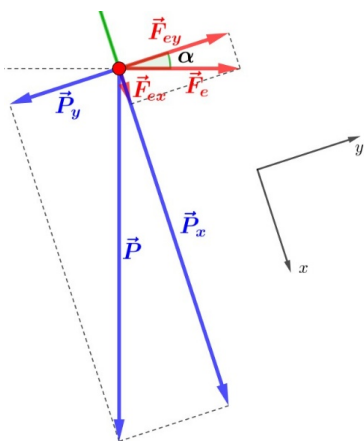
Il diagramma delle forze rappresentato a lato ci dà un'idea di come procedere. Bisogna solo aggiungere che le due tensioni, T_1 e T_2 , sono uguali, dato che le due sferette sono identiche e i due fili hanno la stessa lunghezza. Pertanto, le equazioni che risultano dalla **condizione di equilibrio** (somma delle forze agenti sulle sferette pari a zero) sono:

$$\begin{aligned} \text{asse } x: & \begin{cases} F_e = T_x \\ T_y = P \end{cases} & \begin{cases} k \frac{q^2}{4 L^2 \sin^2 \alpha} = T \sin \alpha \\ T \cos \alpha = mg \end{cases} \end{aligned}$$

Ricavo la tensione dalla seconda equazione e la sostituisco nella prima, in modo da poter determinare l'intensità della carica richiesta:

$$\begin{cases} T = \frac{mg}{\cos \alpha} \\ q = 2L \sin \alpha \sqrt{\frac{1}{k} \cdot \frac{mg}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha} \end{cases} \quad q = 8,2\text{ nC}$$

Dal punto di vista matematico, è più semplice procedere in un altro modo, scegliendo un sistema di riferimento più comodo:



Le equazioni che risultano dalla **condizione di equilibrio** (somma delle forze agenti sulle sferette pari a zero) sono:

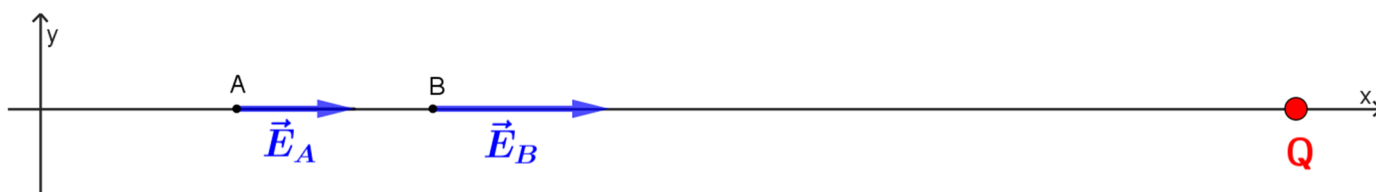
$$\begin{aligned} \text{asse } x: & F_{ex} + P_x = T \\ \text{asse } y: & F_{ey} = P_y \end{aligned} \quad \begin{cases} \dots \\ F_e \cos \alpha = mg \sin \alpha \end{cases}$$

Le incognite da determinare figurano nella seconda equazione senza altre incognite, perciò si può ignorare la prima (utile per determinare la tensione):

$$k \frac{q^2}{(2L \sin \alpha)^2} \cos \alpha = mg \sin \alpha \Rightarrow q = 2L \sin \alpha \sqrt{\frac{1}{k} \cdot \frac{mg}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha} = 8,2\text{ nC}$$

2. Il campo elettrico nel punto $A(5,00\text{ cm}; 0)$ punta nella direzione positiva dell'asse x e ha un'intensità di $10,0\text{ N/C}$. Nel punto $B(10,0\text{ cm}; 0)$ il campo elettrico punta nella direzione positiva dell'asse x e ha un'intensità di $15,0\text{ N/C}$. Assumendo che tale campo elettrico sia prodotto da una singola carica puntiforme, determina la sua posizione, il suo segno e il suo valore.

$$A(5,00\text{ cm}; 0) \quad E_A = 10,0\text{ N/C} \quad B(10,0\text{ cm}; 0) \quad E_B = 15,0\text{ N/C} \quad Q? \quad x_Q?$$



Dalla rappresentazione del campo elettrico illustrato nel testo, si evince che la carica sarà in una posizione $x > 10,0\text{ cm}$ e avrà segno negativo, visto che il campo elettrico è diretto nel verso positivo dell'asse x e aumenta in modulo allontanandosi dall'origine. Indicata con x l'ascissa della carica Q , ottengo due relazioni che posso semplificare, sostituendo $x_B = 2x_A$ e $2E_B = 3E_A$:

$$\begin{cases} E_A = k \frac{|Q|}{(x - x_A)^2} \\ E_B = k \frac{|Q|}{(x - x_B)^2} \end{cases} \quad \begin{cases} k |Q| = E_A (x - x_A)^2 \\ E_B = E_A \frac{(x - x_A)^2}{(x - x_B)^2} \end{cases} \quad \frac{x - x_A}{x - x_B} = \sqrt{\frac{E_B}{E_A}} \quad x\sqrt{2} - x_A\sqrt{2} = x\sqrt{3} - x_B\sqrt{3}$$

$$x(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = x_B\sqrt{3} - x_A\sqrt{2} \Rightarrow x = x_A \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = x_A(4 + \sqrt{6}) = 32 \text{ cm}$$

$$|Q| = \frac{E_A(x - x_A)^2}{k} \Rightarrow Q = -8,3 \cdot 10^{-11} \text{ C}$$

3. Una sfera conduttrice uniformemente carica di raggio $1,5 \text{ m}$ ha una densità superficiale di carica di $7,8 \mu\text{C}/\text{m}^2$.
- Qual è la carica sulla sfera?
 - Determina il flusso del campo elettrico uscente dalla superficie della sfera.
 - Determina il campo elettrico a $0,55 \text{ m}$ dal centro della sfera e a $5,5 \text{ m}$ dal centro della sfera.

$$R = 1,5 \text{ m} \quad \sigma = 7,8 \mu\text{C}/\text{m}^2 \quad Q? \quad \phi? \quad r_1 = 0,55 \text{ m} \quad E_1? \quad r_2 = 5,5 \text{ m} \quad E_2?$$

- A. Per definizione, la densità superficiale di carica è data dal rapporto tra la carica e la superficie, perciò:

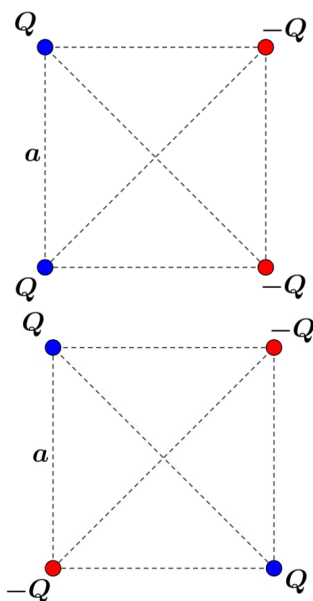
$$\sigma = \frac{Q}{A} \Rightarrow Q = A\sigma = 4\pi R^2\sigma = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ C}$$

- B. Per il teorema di Gauss: $\phi = \frac{Q}{\epsilon_0} = 2,5 \cdot 10^7 \text{ N m}^2/\text{C}$.

- C. Il campo elettrico di una sfera conduttrice uniformemente carica è dato da:

$$E = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & r \geq R \end{cases} \quad E_1 = 0 \text{ N/C} \quad E_2 = 6,6 \cdot 10^4 \text{ N/C}$$

4. Nei vertici di un quadrato di lato a sono disposte quattro cariche di uguale modulo, due positive e due negative. Calcola l'energia potenziale elettrica per tale sistema di cariche nelle due configurazioni diverse che si possono ottenere.



$$U = k \frac{Q^2}{a} - k \frac{Q^2}{a\sqrt{2}} - k \frac{Q^2}{a} - k \frac{Q^2}{a} - k \frac{Q^2}{a\sqrt{2}} + k \frac{Q^2}{a} = -k \frac{Q^2}{a} \sqrt{2}$$

$$U = -k \frac{Q^2}{a} + k \frac{Q^2}{a\sqrt{2}} - k \frac{Q^2}{a} - k \frac{Q^2}{a} + k \frac{Q^2}{a\sqrt{2}} - k \frac{Q^2}{a} = k \frac{Q^2}{a} \left(-4 + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = k \frac{Q^2}{a} (\sqrt{2} - 4)$$

5. Una particella di carica $30 \mu\text{C}$ e massa $0,250 \text{ mg}$ ha una velocità di $12,0 \text{ m/s}$ e si trova in un punto dello spazio a un potenziale di $2,00 \text{ V}$. Se viene spostata in un secondo punto nel quale il suo potenziale scende a $0,50 \text{ V}$, quale sarà la sua velocità in questo secondo punto?

$$q = 30 \mu\text{C} \quad m = 0,250 \text{ mg} \quad v_1 = 12,0 \text{ m/s} \quad V_1 = 2,00 \text{ V} \quad V_2 = 0,50 \text{ V} \quad v_2?$$

Applico il principio di conservazione dell'energia:

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2 \quad K_2 = K_1 + U_1 - U_2$$

Sapendo che il potenziale è dato dal rapporto tra energia potenziale e carica, ottengo: $U = qV$, perciò:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + qV_1 - qV_2 \quad v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2q}{m}(V_1 - V_2)} = \mathbf{22,4 \text{ m/s}}$$

6. La differenza di potenziale tra le armature di un condensatore a facce piane e parallele è 35 V e il campo elettrico tra le armature è di 750 V/m . Se l'area della superficie delle armature è $4,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$, qual è la capacità del condensatore?

$$V = 35 \text{ V} \quad E = 750 \text{ V/m} \quad A = 4,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \quad C?$$

Sapendo che $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, all'interno del condensatore e che $\sigma = \frac{Q}{A}$, dalla definizione di capacità, come rapporto tra carica e potenziale, trovo la risposta al quesito:

$$Q = A\sigma = AE\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{Q}{V} = \varepsilon_0 \frac{AE}{V} = \mathbf{7,6 \cdot 10^{-12} \text{ F}}$$