

1. Determina la retta parallela all'asse x rispetto a cui sono simmetriche le due parabole di equazioni $y = 4x - x^2$ e $y = x^2 - 4x + 6$. Verifica quindi che i loro vertici sono simmetrici rispetto a tale retta.

La generica retta parallela all'asse x ha equazione: $y = a$. La simmetria assiale rispetto a tale retta ha equazioni:
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2a - y \end{cases}$$

Applico la trasformazione alla seconda parabola: $2a - y = x^2 - 4x + 6 \quad y = -x^2 + 4x - 6 + 2a$

Perché la trasformata della seconda parabola coincida con la prima, per il principio di identità dei polinomi deve avere termine noto nullo, perciò:

$$-6 + 2a = 0 \quad a = 3 \quad \mathbf{y = 3}$$

Per verifica che i due vertici siano simmetrici rispetto a tale retta, determino il punto medio del segmento che ha per estremi i due vertici e verifico che ha ordinata uguale a 3:

$$V_1(2, 4) \quad V_2(2, 2) \quad M\left(\frac{x_{V_1} + x_{V_2}}{2}, \frac{y_{V_1} + y_{V_2}}{2}\right) = (2, \mathbf{3})$$

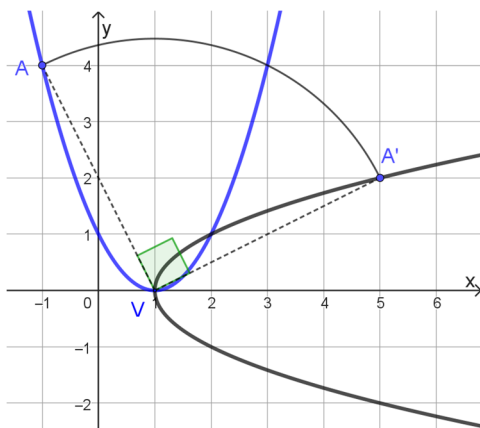
2. Determina per quali valori di k il simmetrico del punto $A(k; k)$ rispetto a $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ dista $2\sqrt{5}$ dall'origine del sistema di riferimento.

Le equazioni della simmetria di centro P sono:
$$\begin{cases} x' = 1 - x \\ y' = 3 - y \end{cases}$$

Applicando la trasformazione al generico punto A , ottengo: $A'(1 - k; 3 - k)$. Tale punto ha distanza dall'origine uguale a $2\sqrt{5}$:

$$\overline{OA'} = 2\sqrt{5} \Rightarrow \overline{OA'}^2 = 20 \Rightarrow (1 - k)^2 + (3 - k)^2 = 20 \Rightarrow k^2 - 4k - 5 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} k_1 = -1 \\ k_2 = 5 \end{matrix}$$

3. Individua una trasformazione geometrica che trasformi la parabola di equazione $y = x^2 - 2x + 1$ in quella di equazione $x = y^2 + 1$.



Le due parabole hanno lo stesso vertice $V(1,0)$ e assi di simmetria perpendicolari, perciò la trasformazione geometrica che trasforma la prima parabola nella seconda è una rotazione di centro V e angolo $-\frac{\pi}{2}$, che ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = (x - x_V) \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - (y - y_V) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + x_V \\ y' = (x - x_V) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + (y - y_V) \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + y_V \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x' = y + 1} \\ \mathbf{y' = -x + 1} \end{cases}$$

La seconda trasformazione geometrica efficace è la simmetria assiale con asse la retta passante per il vertice e il secondo punto di intersezione, ovvero $y = x - 1$.

4. Determina il centro di simmetria della curva di equazione $y = x^3 - 3x^2$.

Sia $C(a, b)$ il centro di simmetria della curva, e siano date le equazioni della simmetria di centro C :

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$

Applicando la trasformazione alla curva, devo ottenere la stessa curva:

$$\begin{aligned} 2b - y &= (2a - x)^3 - 3(2a - x)^2 & 2b - y &= 8a^3 - 12a^2x + 6ax^2 - x^3 - 12a^2 + 12ax - 3x^2 \\ y &= x^3 - 3x^2(2a - 1) + 12ax(a - 1) - 8a^3 + 12a^2 + 2b \end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} 2a - 1 = 1 \\ 12a(a - 1) = 0 \\ -8a^3 + 12a^2 + 2b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ 0 = 0 \\ b = -2 \end{cases}$$

Il centro di simmetria della curva ha coordinate: $\mathbf{C(1, -2)}$.

5. Considera la retta r di equazione $x + y - 1 = 0$ e la retta s di equazione $2x + y - a + 1 = 0$. Determina a in modo che la simmetrica di s rispetto a r passi per l'origine.

Determino le equazioni della simmetria assiale rispetto alla retta r , ricordando che, dato un punto $P(x, y)$ e il suo simmetrico $P'(x', y')$ rispetto alla retta r , $PP' \perp r$ e il punto medio $M\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$ del segmento PP' appartiene alla retta r , perciò:

$$\begin{cases} m'_{PP} = -\frac{1}{m_r} \\ x_M + y_M - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{y-y'}{x-x'} = 1 \\ \frac{x+x'}{2} + \frac{y+y'}{2} - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = x' - y' \\ x + y = -x' - y' + 2 \\ 2x = -2y' + 2 \end{cases} \quad \sigma: \begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -x + 1 \end{cases}$$

Per determinare la simmetrica della retta s , determino innanzi tutto le equazioni dell'inversa di σ e poi la applico alla retta s , ottenendo s' :

$$\sigma^{-1}: \begin{cases} x = -y' + 1 \\ y = -x' + 1 \end{cases} \quad s': 2(-y + 1) + (-x + 1) - a + 1 = 0 \quad x + 2y - 4 + a = 0$$

Perché la retta data passi per l'origine, deve avere termine noto nullo, perciò: $a = 4$.

Avrei potuto vedere il problema anche in un altro modo: il punto simmetrico dell'origine rispetto alla retta r deve appartenere alla retta s . La perpendicolare a r passante per l'origine è la bisettrice di primo e terzo quadrante: $y = x$. L'intersezione tra la bisettrice e la retta r ha coordinate:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \\ 2x = 1 \end{cases} \quad M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Devo determinare le coordinate del simmetrico dell'origine rispetto a tale punto:

$$O(0,0) \rightarrow O'(1 - x_o; 1 - y_o) = O'(1,1)$$

Impongo il passaggio della retta s per tale punto: $2 + 1 - a + 1 = 0 \Rightarrow a = 4$.

6. Discuti il seguente sistema parametrico misto: $\begin{cases} y = -x^2 - 4x - 3 \\ kx - y - 2 = 0 \\ -3 \leq x \leq 0 \end{cases}$

Il sistema ha per oggetto una parabola, con asse parallelo all'asse y e vertice $V(-2, 1)$, e un fascio proprio di centro $C(0, 2)$. Gli estremi dell'arco di parabola rispetto al quale determinare le intersezioni sono $A(-3, 0)$ e $B(0, -3)$.

Impongo il passaggio del fascio per il punto dato A, sostituendo le coordinate di A nell'equazione del fascio:

$$-3k - 2 = 0 \quad k = -\frac{2}{3}$$

Per quanto riguarda il punto B, la retta del fascio passante per B è l'asse y , che non posso ottenere per nessun valore del parametro.

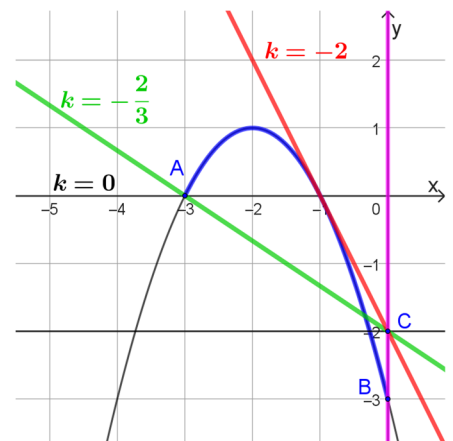
Determino il valore del parametro in corrispondenza della tangente, ponendo il discriminante dell'equazione risolvente uguale a zero:

$$\begin{cases} y = kx - 2 \\ y = -x^2 - 4x - 3 \end{cases} \quad x^2 + 4x + 3 + kx - 2 = 0 \quad x^2 + x(k + 4) + 1 = 0 \quad \Delta = (k + 4)^2 - 4 = 0$$

$$k + 4 = \pm 2 \quad \begin{cases} k_1 = -2 \\ k_2 = -6 \end{cases}$$

Dal momento che il fascio ha verso di percorrenza antiorario, il valore della tangente è $k = -2$. Pertanto il sistema ha:

$$1 \text{ soluzione per } k > -\frac{2}{3} \quad 2 \text{ soluzioni per } -2 \leq k \leq -\frac{2}{3}$$



7. Scrivi il sistema parametrico risolvete del seguente problema, dopo aver rappresentato la situazione e studiato i casi limite.
 Data la parabola $y = ax^2 + bx + 2a - 2$ di vertice $V(1; -1)$, dette O e B le sue intersezioni con l'asse x , determina sull'arco $\overline{OVB}$ un punto P tale che:

$$k \overline{PH} + \overline{PM} = 3 \quad (k \in \mathbb{R})$$

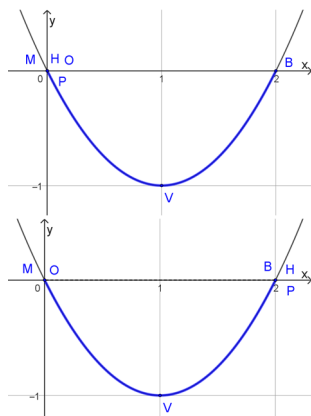
essendo $\overline{PH}$ e $\overline{PM}$ rispettivamente le distanze di P dagli assi x e y .

Dato che l'ascissa generica del vertice è $-\frac{b}{2a}$, ottengo: $b = -2a$ e la generica equazione diventa $y = ax^2 - 2ax + 2a - 2$. Sostituisco le coordinate del vertice nella generica equazione della parabola e ottengo il valore del parametro:

$$-1 = a - 2a + 2a - 2 \quad a = 1 \quad y = x^2 - 2x$$

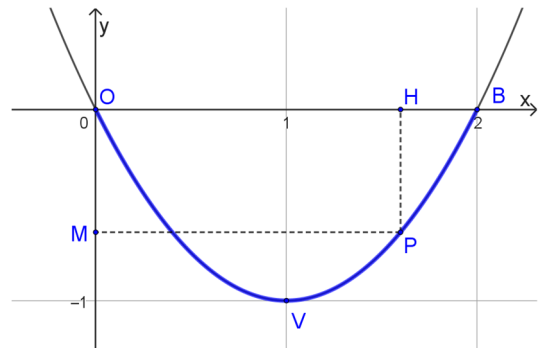
Rappresento la situazione descritta, considerando $O(0, 0)$ e $B(2, 0)$ le intersezioni della parabola con l'asse x :

Valuto i casi limite:



Nel caso in cui $P \equiv O$, cioè $x = 0$, $\overline{PM} = 0$ e $\overline{PH} = 0$, perciò, dato che l'equazione data è impossibile, la situazione non è accettabile.

Nel caso in cui $P \equiv B$, cioè $x = 2$, $\overline{PM} = 2$ e $\overline{PH} = 0$, perciò, dato che l'equazione data è impossibile, la situazione non è accettabile.



Le limitazioni del sistema sono date da: $0 < x < 2$.

Dato che P si trova nel quarto quadrante, ha ascissa positiva e ordinata negativa. Se (x, y) sono le sue coordinate, che soddisfano l'equazione della parabola, dato che P è un punto della stessa, $\overline{PH} = -y$ e $\overline{PM} = x$. Perciò l'equazione del fascio, data dalla condizione posta dal problema, diventa:

$$k(-y) + x = 3 \quad x - ky - 3 = 0$$

Ecco, quindi, il sistema parametrico che descrive la situazione del problema:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ x - ky - 3 = 0 \\ 0 < x < 2 \end{cases}$$