1. Completa le seguenti uguaglianze, deducendo dal grafico il valore dei seguenti limiti, se esistono:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

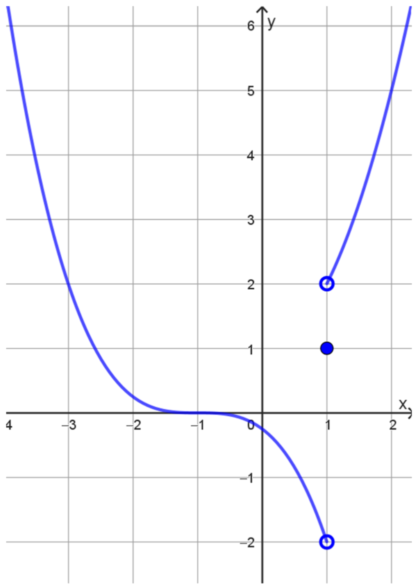
$$\lim_{x\to-1} f(x) = \mathbf{0}$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \mathbf{-2^+}$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \mathbf{2^+}$$

$$\lim_{x\to1} f(x) = \boldsymbol{non\ esiste}$$

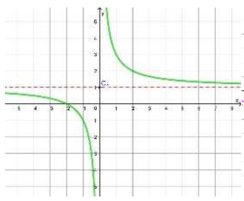
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

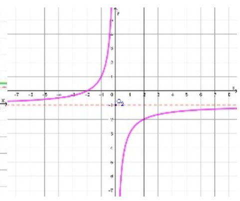


2. Traccia il grafico della funzione $f(x) = \frac{x^2-4}{|x^2-2x|}$ e deduci da esso i valori dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) \qquad \lim_{x\to2^-} f(x) \qquad \lim_{x\to2^+} f(x) \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Il grafico è dato da parti di due funzioni omografiche:

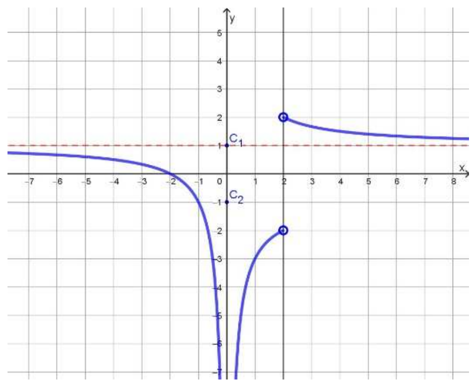




$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x} & se\ x<0 \ \vee \ x>2 \\ -\dfrac{x+2}{x} & se\ 0<x<2 \end{cases}$$

La prima funzione omografica ha centro $C_1(0,1)$ e la seconda $C_2(0,-1)$.

Dal grafico complessivo, posso ricavare i limiti richiesti:



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \mathbf{1^-} \qquad \lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to2^-} f(x) = \mathbf{-2^-}$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \mathbf{2^-} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \mathbf{1^+}$$

3. Che cosa significano le seguenti scritture per $f(x)$?

$\forall\varepsilon>0, \exists c>0 \mid \forall x<-c\ |f(x)|<\varepsilon$	$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
$\forall M>0, \exists\delta>0 \mid \forall x\in]3;3+\delta[\ f(x)>M$	$\lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty$
$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \mid \forall x, |x|<\delta, |f(x)+1|<\varepsilon$	$\lim_{x\to0} f(x) = -1$
$\forall M>0, \exists c>0 \mid \forall x>c, f(x)<-M$	$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Verifica, applicando la definizione, **due** tra i seguenti limiti assegnati:

4. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{6}{x} = 3$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 |\ \forall x, |x-2| < \delta, \left|\frac{6}{x} - 3\right| < \varepsilon$$

Risolvo la disequazione:

$$\begin{cases} \frac{6}{x} < 3+\varepsilon \\ \frac{6}{x} > 3-\varepsilon \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x(3+\varepsilon)-6}{x} > 0 \\ \frac{x(3-\varepsilon)-6}{x} < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0 \quad \vee \quad x > \frac{6}{3+\varepsilon} \\ 0 < x < \frac{6}{3-\varepsilon} \end{cases} \qquad \boldsymbol{\frac{6}{3+\varepsilon} < x < \frac{6}{3-\varepsilon}}$$

Quello ottenuto è un intorno di 2. Il limite è verificato.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$$\forall M > 0, \exists\delta > 0 |\ \forall x, |x| < \delta, \frac{1}{x^2} > M$$

Risolvo la disequazione:

$$\frac{1}{x^2} > M \qquad entrambi\ i\ membri\ sono\ positivi\colon passo\ ai\ reciproci\colon \begin{cases} x^2 < \frac{1}{M} \\ x \neq 0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{M}} < x < \frac{1}{\sqrt{M}} \ \wedge\ x \neq 0}$$

Quello ottenuto è un intorno di 0. Il limite è verificato.

6. $\lim\limits_{x\to -1^+} \ln(x+1) = -\infty$

$$\forall M > 0, \exists\delta > 0 |\ \forall x \in]-1; -1+\delta[\ \ \ln(x+1) < -M$$

Risolvo la disequazione:

$$\ln(x+1) < -M \qquad \begin{cases} x+1 < e^{-M} \\ x+1 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < e^{-M} - 1 \\ x > -1 \end{cases} \qquad \boldsymbol{-1 < x < -1 + e^{-M}}$$

Quello ottenuto è un intorno destro di – 1. Il limite è verificato.

7. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists c > 0 |\ \forall x, x > c, \left|\frac{2x^2}{x^2+1} - 2\right| < \varepsilon$$

Risolvo la disequazione:

$$\left|-\frac{2}{x^2+1}\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{x^2+1}{2}\right| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad x^2+1 < -\frac{2}{\varepsilon} \ \ \vee \ \ x^2+1 > \frac{2}{\varepsilon}$$

La prima disequazione non ha soluzioni, visto che il primo membro è sicuramente positivo e il secondo membro sicuramente negativo e un numero positivo non può essere minore di un numero negativo. Procedo con la seconda disequazione:

$$x^2+1 > \frac{2}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad x^2 > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \quad \Rightarrow \quad x < -\sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 1} \ \ \vee \ \ \boldsymbol{x > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 1}}$$

Il primo è un intorno di $-\infty$. Il secondo è un intorno di $+\infty$. Il limite è verificato.

Calcola i seguenti limiti:

8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{-x}}{x^2+4x}$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 2^{-x}=0^+ \qquad \lim_{x\to+\infty} (x^2+4x)=+\infty \qquad quindi: \lim_{x\to+\infty} \frac{2^{-x}}{x^2+4x}=\mathbf{0}$

9. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \log(\cos x)$

$\displaystyle\lim_{x\to0^+} \log(\cos x)=\log(1^-)=\mathbf{0^-}$

10. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\sin x}{\ln x}$

$\displaystyle\lim_{x\to0^+} \sin x=0^+ \qquad \lim_{x\to0^+} \ln x=-\infty \qquad quindi: \lim_{x\to0^+} \frac{\sin x}{\ln x}=\mathbf{0}$

11. $\displaystyle\lim_{x\to4^+} \left(\frac{2x}{3x-1}\right)^{\frac{1}{\ln(x-3)}}$

$\displaystyle\lim_{x\to4^+} \frac{2x}{3x-1}=\frac{8}{11} \qquad \lim_{x\to4^+} \ln(x-3)=0^+ \qquad \lim_{x\to4^+} \frac{1}{\ln(x-3)}=+\infty \qquad quindi: \lim_{x\to4^+} \left(\frac{2x}{3x-1}\right)^{\frac{1}{\ln(x-3)}}=\mathbf{0^+}$

12. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}+2x}{2x-4}$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+2x}{2x-4}=\lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+2x}{2x-4}=\lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+2\right)}{x\left(2-\frac{4}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+2}{2-\frac{4}{x}}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

13. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} [\ln x-\ln(x^2+x)]$

$$\lim_{x\to0^+} \ln\frac{x}{x^2+x}=\lim_{x\to0^+} \ln\frac{x}{x(x+1)}=\lim_{x\to0^+} \ln\frac{1}{x+1}=\mathbf{0}$$

14. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{arc\sin x}{2x}$

$$Pongo: y=arc\sin x \quad\Rightarrow\quad x=\sin y \quad\Rightarrow\quad \lim_{y\to0^+} \frac{y}{2\sin y}=\frac{1}{2}\lim_{y\to0^+}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^{-1}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

15. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^2}{2-2x^2}\left(\sqrt{2-x}-1\right)$

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x^2}{2(1-x^2)}\cdot\left(\sqrt{2-x}-1\right)\cdot\frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{2-x}+1}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x^2(1-x)}{2(1-x)(1+x)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2}{2(1+x)\left(\sqrt{2-x}+1\right)}=\mathbf{\frac{1}{8}}$$

16. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\ln^2 x^2}}$

$$So\ che: a=e^{\ln a}\ e\ che \lim_{x\to+\infty} \ln x=+\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x}=0, quindi:$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{(2\ln x)^2}}=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{4\ln^2 x}}=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{4\ln x}}=\mathbf{1}$$

17. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2x-\pi}{\cos x}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x}\right)^{-1} = \mathbf{-2}$$

18. $\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)-\tan(x-2)}{(x-2)^3}$

$$Pongo: y = x-2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{y\to 0}\frac{\sin y - \frac{\sin y}{\cos y}}{y^3} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{-(1-\cos y)}{y^2\cos y}\right) = -\lim_{y\to 0}\frac{(1-\cos y)(1+\cos y)}{y^2\cos y\,(1+\cos y)} =$$

$$= -\lim_{y\to 0}\frac{\sin^2 y}{y^2\cos y\,(1+\cos y)} = -\lim_{y\to 0}\left(\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos y\,(1+\cos y)}\right) = \mathbf{-\frac{1}{2}}$$

19. Considera la retta r, di coefficiente angolare k, che interseca l'asse y nel punto $P(0,3)$. Esprimi in funzione di k la distanza $d(k)$ della retta dal punto $Q(2,4)$. Calcola:

$$\lim_{k\to+\infty} d(k)$$

Qual è il significato geometrico del limite?

La generica retta passante per il punto P dato ha equazione: $y = kx+3$. Determino la distanza del punto Q da tale retta:

$$d(k) = \frac{|2k-4+3|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}}$$

Calcolo il limite:

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{|2k-1|}{\sqrt{k^2+1}} = \lim_{k\to+\infty}\frac{|k|\left|2-\frac{1}{k}\right|}{|k|\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}} = \lim_{k\to+\infty}\frac{\left|2-\frac{1}{k}\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}} = \mathbf{2}$$

Per $k\to+\infty$ la retta diventa l'asse y e la distanza del punto Q dall'asse y è proprio uguale a 2.

20. Disegna il grafico probabile di una funzione $y = f(x)$ che soddisfi le condizioni date.

$D =]-\infty;-3[\,\cup\,]-3;-1[\,\cup$
$\cup\,]-1;1[\,\cup\,]1;3[\,\cup\,]3;+\infty[$

Non ammette zeri

$f(x) > 0: x < -3 \;\vee\; -1 < x < 1 \;\vee\; x > 3$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+ \qquad \lim_{x\to-3^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-3^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to3^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to3^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$