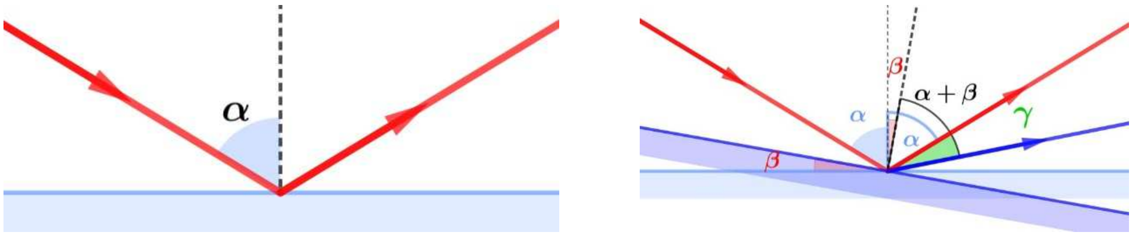
1. Un raggio luminoso, che proviene dalla sinistra, colpisce uno specchio piano con un angolo di incidenza α. Lo specchio viene poi ruotato di un angolo $\beta < 90° - \alpha$ in senso orario, mentre il raggio incidente mantiene la sua direzione. Di quale angolo viene ruotato il raggio riflesso?



Se lo specchio viene ruotato di un angolo β, anche la normale viene ruotata dello stesso angolo, perciò l'angolo di incidenza, e di conseguenza l'angolo di riflessione visto che sono uguali, avrà ampiezza $\alpha + \beta$.
Ho modo di ottenere l'angolo richiesto per differenza: $\gamma = \alpha + \beta - (\alpha - \beta) = \alpha + \beta - \alpha + \beta = \boldsymbol{2\beta}$.

2. Un tubo è aperto a un'estremità. Una certa armonica del tubo ha frequenza $450\ Hz$, mentre l'armonica successiva ha frequenza $750\ Hz$. Determina la frequenza della prima armonica.

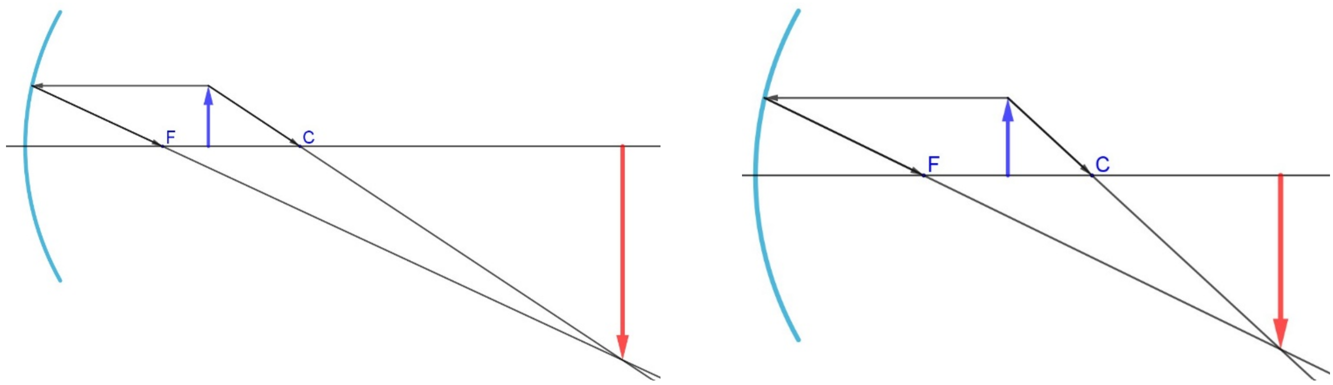
$$f_n = 450\ Hz \qquad f_{n+1} = 750\ Hz \qquad f_1?$$

Le due armoniche hanno espressione: $f_n = (2n-1)\dfrac{v}{4L}$ $\qquad f_{n+1} = (2(n+1)-1)\dfrac{v}{4L} = (2n+1)\dfrac{v}{4L}$

Posso esplicitare meglio la seconda, in funzione della prima: $f_{n+1} = (2n-1+2)\dfrac{v}{4L} = (2n-1)\dfrac{v}{4L} + 2 \cdot \dfrac{v}{4L} = f_n + 2f_1$

È quindi possibile determinare la frequenza della prima armonica: $f_1 = \dfrac{f_{n+1} - f_n}{2} = \mathbf{150\ Hz}$

3. Uno specchio concavo, con distanza focale $30\ cm$, forma l'immagine capovolta di una biro con un ingrandimento 3. Di quanto bisogna spostare la biro, e in che verso, per avere un'immagine con ingrandimento 2? Giustifica la tua risposta sia graficamente che algebricamente.



L'ingrandimento dell'oggetto, trattandosi di un'immagine reale, capovolta, ingrandita, è dato da: $G_1 = -\dfrac{q_1}{p_1} = -3 \quad \Rightarrow \quad q_1 = 3p_1$

Applico l'equazione dei punti coniugati: $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{q_1} = \dfrac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{3p_1} = \dfrac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{4}{3p_1} = \dfrac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad p_1 = \dfrac{4}{3}f$

Ripercorro i passaggi nel secondo caso: $G_2 = -\dfrac{q_2}{p_2} = -2 \quad \Rightarrow \quad q_2 = 2p_2$

Applico l'equazione dei punti coniugati: $\dfrac{1}{p_2} + \dfrac{1}{q_2} = \dfrac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{p_2} + \dfrac{1}{2p_2} = \dfrac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{3}{2p_2} = \dfrac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad p_2 = \dfrac{3}{2}f$

La rappresentazione grafica suggerisce uno spostamento dell'oggetto verso il centro. Algebricamente: $p_2 - p_1 = \dfrac{3}{2}f - \dfrac{4}{3}f = \dfrac{1}{6}f = \mathbf{5\ cm}\ \ \boldsymbol{verso\ il\ centro\ dello\ specchio}$

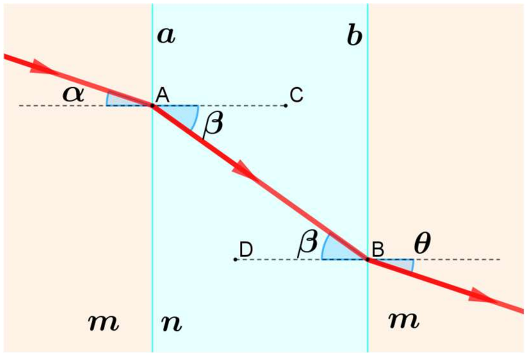
4. Un raggio luminoso (**figura 1**) incide con un angolo α sulla faccia di una lastra di vetro (indice di rifrazione n) immersa in un mezzo trasparente (indice di rifrazione m).
   A. Come si nota dalla figura, l'angolo di rifrazione β è maggiore dell'angolo di incidenza α. Qual è la relazione tra i due indici di rifrazione?
   B. Dimostra che, se c'è un raggio rifratto uscente dalla lastra, l'angolo di rifrazione θ è uguale all'angolo di incidenza α.
   C. Verifica che il raggio luminoso esce dalla lastra solo se $\alpha < \arcsin(n/m)$.

A. Legge di Snell: $m \sin\alpha = n \sin\beta \quad \Rightarrow \quad \dfrac{m}{n} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ Essendo $\alpha < \beta \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha < \sin\beta$, perciò: $\boldsymbol{m > n}$

B. Sempre applicando la legge di Snell nei due passaggi:
dalla sostanza trasparente al vetro:

$$m \sin\alpha = n \sin\beta$$

dal vetro alla sostanza trasparente: devo innanzi tutto notare che $C\hat{A}B \cong A\hat{B}D$ perché angoli alterni interni, in rette parallele ($AC \parallel BD$) tagliate dalla trasversale AB. $AC \parallel BD$ perché normali alle due superfici di separazione, a e b, parallele tra loro. Perciò, applicando la legge di Snell:



$$n \sin\beta = m \sin\theta$$

Le due equazioni valgono contemporaneamente, perciò:

$$\begin{cases} m \sin\alpha = n \sin\beta \\ n \sin\beta = m \sin\theta \end{cases} \qquad m \sin\alpha = m \sin\theta \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \sin\theta$$

Trattandosi di due angoli acuti, posso dedurre: $\boldsymbol{\theta = \alpha}$

C. Il raggio luminoso non esce dalla lastra nel caso in cui si ha il fenomeno della riflessione totale, ovvero $\beta = 90°$, perciò:

$$m \sin\alpha_1 = n \sin 90° \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha_1 = \frac{n}{m} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = arc\,\sin\frac{n}{m}$$

Perché $\beta < 90°$, l'angolo di incidenza $\alpha < \alpha_1$, quindi: $\boldsymbol{\alpha < arc\,\sin\dfrac{n}{m}}$

5. Un musicista è in piedi, di fronte a un grande muro liscio, e tiene in mano, vicino al suo orecchio, un diapason che emette un suono di frequenza $400\ Hz$. Mentre il diapason vibra, il musicista si muove con velocità costante verso il muro, e percepisce una frequenza di battimento di $2{,}12\ Hz$ tra l'onda sonora che giunge al suo orecchio direttamente dal diapason e quella che vi giunge dopo essere stata riflessa dal muro. Calcola la velocità con cui il musicista si sta muovendo verso il muro, usando come velocità del suono il valore $343\ m/s$.

$$f_1 = 400\ Hz \qquad f_b = 2{,}12\ Hz \qquad v_s = 343\ m/s \qquad v?$$

$f_b = f_2 - f_1$ — f_b è la frequenza di battimento e f_2 è la frequenza dell'eco. Ho la garanzia che $f_2 > f_1$ perché il musicista si sta avvicinando alla parete. Determino la frequenza f_2 applicando l'effetto Doppler.

Considero due movimenti: il suono che va dal musicista alla parete, che è il caso di una sorgente in movimento con velocità v (il musicista), mentre l'osservatore (il muro) è fermo. Il muro riceve il suono con frequenza:

$$f_1' = f_1 \frac{v}{v_s - v}$$

Il suono poi va dalla parete al musicista: il muro diventa una sorgente (ferma) e il ricevitore è il musicista (in movimento), perciò:

$$f_2 = f_1' \frac{v_s + v}{v} = f_1 \frac{v}{v_s - v} \cdot \frac{v_s + v}{v} = f_1 \frac{v_s + v}{v_s - v}$$

A questo punto, posso risolvere l'equazione risultante e determinare la velocità richiesta:

$$f_b = f_1 \frac{v_s + v}{v_s - v} - f_1 = f_1 \frac{v_s + v - v_s + v}{v_s - v} = \frac{2 v f_1}{v_s - v} \quad \Rightarrow \quad v_s f_b - v f_b = 2 v f_1 \quad \Rightarrow \quad v = v_s \frac{f_b}{2 f_1 + f_b} = \boldsymbol{0{,}91\ m/s}$$

6. Due raggi luminosi incidono su una vasca contenente bisolfuro di carbonio, un liquido incolore con indice di rifrazione pari a $1{,}63$, come mostrato in **figura 2**. La distanza tra i punti di incidenza dei due raggi è $d = 10{,}0\ cm$. Calcola a quale profondità si incontrano i due raggi rifratti.

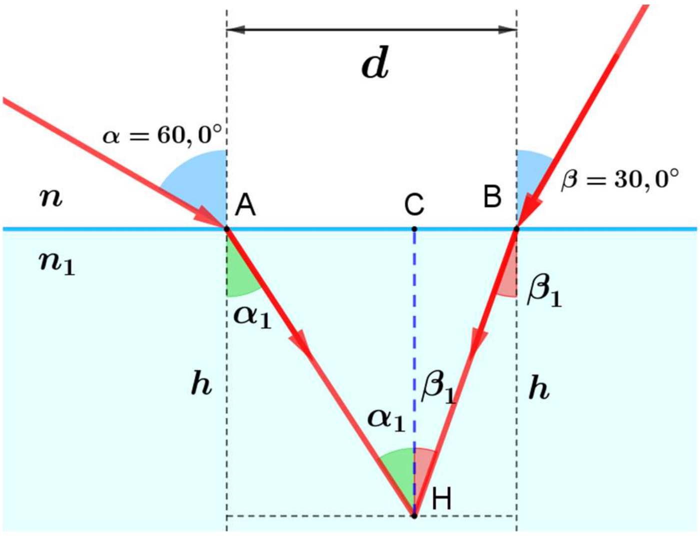
$n = 1{,}00 \qquad n_1 = 1{,}63 \qquad d = 10{,}0\ cm \qquad h?$

Applico la legge di Snell per determinare gli angoli α_1 e β_1 indicati in figura:

$$n \sin\alpha = n_1 \sin\alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \arcsin\left(\frac{n}{n_1}\sin\alpha\right)$$

$$n \sin\beta = n_1 \sin\beta_1 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = \arcsin\left(\frac{n}{n_1}\sin\beta\right)$$

La distanza d è data dalla somma dei due segmenti AC e CB, cateti, rispettivamente, dei triangoli rettangoli ACH e CBH. Questi due triangoli hanno in comune il cateto CH che è l'altezza da determinare. Con i teoremi della trigonometria, posso scrivere i due segmenti in funzione degli angoli rifratti:



$$\overline{AC} = \overline{CH}\tan\alpha_1 \qquad\qquad \overline{BC} = \overline{CH}\tan\beta_1$$

$$d = \overline{AC} + \overline{BC} = h\ \tan\alpha_1 + h\ \tan\beta_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{d}{\tan\alpha_1 + \tan\beta_1} = \frac{d}{\tan\left(\arcsin\left(\frac{n}{n_1}\sin\alpha\right)\right) + \tan\left(\arcsin\left(\frac{n}{n_1}\sin\beta\right)\right)} = \mathbf{10,5\ cm}$$