1. Sia $f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}$; esiste $\lim_{x\to 1} f(x)$? Si giustifichi la risposta.

Riscrivo la funzione, togliendo il valore assoluto e riconoscendo la differenza di quadrati a numeratore:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} & se\ x>1\\[2mm] \dfrac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} & se\ x<1\end{cases} \qquad\qquad f(x)=\begin{cases}x+1 & se\ x>1\\ -(x+1) & se\ x<1\end{cases}$$

Sapendo che $\lim_{x\to 1} f(x)$ esiste se e solo se esistono entrambi i limiti destro e sinistro e coincidono, procedo a calcolare i due limiti:

$$\lim_{x\to 1^+}(x+1)=2 \qquad\qquad \lim_{x\to 1^-}(-x-1)=-2$$

Dato che i due limiti sono diversi, **non esiste il limite richiesto**.

Esame di stato liceo scientifico, corso di ordinamento – 2008, sessione ordinaria, quesito 9

2. Verificare che la funzione: $f(x)=\frac{1}{3^{\frac{1}{x}}+1}$ ha una discontinuità di prima specie ("a salto"), mentre la funzione: $f(x)=\frac{x}{3^{\frac{1}{x}}+1}$ ha una discontinuità di terza specie ("eliminabile").

Le due funzioni hanno lo stesso dominio: $D=(-\infty;0)\cup(0;\ +\infty)$.

Calcolo limite destro e limite sinistro per le due funzioni in $x_o=0$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{3^{\frac{1}{x}}+1}=0 \qquad\qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{3^{\frac{1}{x}}+1}=1$$

Per definizione, la funzione ha un punto di singolarità di **prima specie**, con salto 1, per $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{3^{\frac{1}{x}}+1}=0 \qquad\qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{3^{\frac{1}{x}}+1}=0$$

Per definizione, la funzione ha un punto di singolarità di **terza specie** per $x=0$.

Esame di stato liceo scientifico – 2015, sessione straordinaria, quesito 2

3. Si consideri la funzione $f(x)=(2x-1)^7(4-2x)^5$. Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo $\frac{1}{2}\le x\le 2$.

La funzione, algebrica razionale intera, è continua $\forall x\in\mathbb{R}$ e in particolare nell'intervallo chiuso dato. Valgono le ipotesi del **teorema di Weierstrass**, il cui enunciato è: *Se f è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, allora essa assume, in tale intervallo, il massimo assoluto e il minimo assoluto.*
Pertanto, la funzione ammette massimo e minimo assoluto.

Esame di stato liceo scientifico, corso di ordinamento - 2002, sessione ordinaria, quesito 6

4. Data la funzione $f(x)=e^x-\sin x-3x$, calcolarne i limiti per x tendente a $+\infty$ e $-\infty$ e provare che esiste un numero reale α con $0<\alpha<1$ in cui la funzione si annulla.

Calcolo i limiti richiesti:

Considerato che la funzione $y=\sin x$ è una funzione limitata e continua, e che:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty}(3x)=+\infty$$

Per la gerarchia degli infiniti:

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x-3x)=+\infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to+\infty}(e^x-\sin x-3x)=+\infty$$

Il secondo limite:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to-\infty}(e^x-\sin x-3x)=+\infty$$

Per verificare che esiste un numero reale nell'intervallo aperto $(0;1)$ in cui la funzione si annulla, verifico le ipotesi del **teorema di esistenza degli zeri**: *Se f è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e negli estremi di tale intervallo assume valori di segno opposto, allora esiste almeno un punto $c\in(a,b)$ in cui f si annulla, ossia $f(x)=0$.*
La funzione, in quanto somma di funzioni continue, è continua $\forall x\in\mathbb{R}$ e quindi anche nell'intervallo $[0;1]$. Verifico che $f(0)f(1)<0$:

$$f(0)=1-0-0=1>0 \qquad\qquad f(1)=e-\sin 1-3<0$$

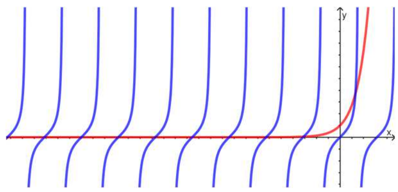
Per il teorema di esistenza degli zeri, esiste almeno un punto $\alpha\in(0,1)$ in cui f si annulla.

Esame di stato liceo scientifico, corso sperimentale PNI – 200 , sessione ordinaria, quesito 7

5. Provare che la funzione $y = e^x - \tan x$ ha infiniti zeri, mentre la funzione $y = e^x - arc\tan x$ non ne ha alcuno.

Verificare che la funzione $y = e^x - \tan x$ ha infiniti zeri equivale a verificare che $e^x - \tan x = 0$, cioè che il sistema: $\begin{cases} y = e^x \\ y = \tan x \end{cases}$ ha infinite soluzioni.

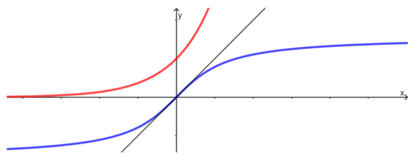
Rappresento graficamente le due funzioni: considerata la periodicità della funzione tangente e visto che la funzione esponenziale è continua $\forall x \in \mathbb{R}$, i due grafici hanno infinite intersezioni.



Verificare che la funzione $y = e^x - arc\tan x$ non ha alcuno zero equivale a verificare che $e^x - arc\tan x = 0$ non ha soluzioni, cioè che il sistema: $\begin{cases} y = e^x \\ y = arc\tan x \end{cases}$ non ha soluzioni.

Rappresento graficamente le due funzioni e rilevo che:

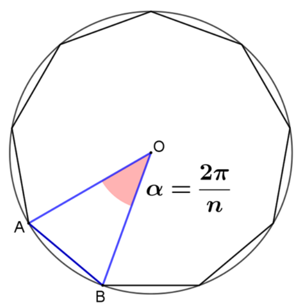
- la funzione $y = arc\tan x$ è compresa tra due fasce:
$$-\frac{\pi}{2} < arc\tan x < 0 \quad se\ x < 0 \qquad e \qquad 0 < arc\tan x < \frac{\pi}{2} \quad se\ x > 0$$
- la funzione esponenziale è sempre positiva (e quindi per $x < 0$ non interseca mai la funzione $y = arc\tan x$)
- per $x > 0$ $arc\tan x < x$, e $e^x > x$, perciò non ci sono intersezioni tra le due funzioni.



Esame di stato liceo scientifico – 2015, sessione suppletiva, quesito 8

6. Detta $A(n)$ l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio C di raggio r, verificare che $A(n) = \frac{n}{2} r^2 \sin\frac{2\pi}{n}$ e calcolarne il limite per $n \to \infty$.

Considero un poligono di n lati e la circonferenza circoscritta al poligono. Congiungendo ogni vertice del poligono con il centro della circonferenza, ottengo n triangoli isosceli, congruenti tra loro, con angolo al vertice di ampiezza $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ e lati congruenti uguali al raggio. L'area del poligono è data dalla somma delle aree dei singoli triangoli, ovvero:



$$\mathcal{A}(n) = n \cdot \mathcal{A}_{ABO} = n \cdot \frac{1}{2}\overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \sin\alpha = \frac{n}{2} r^2 \sin\frac{2\pi}{n}$$

Calcolo il limite, ponendo: $y = \frac{2\pi}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} r^2 \sin\frac{2\pi}{n} = r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \cdot \pi = \pi r^2 \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = \boldsymbol{\pi r^2}$$

Esame di stato liceo scientifico - 2015, sessione ordinaria, quesito 7

7. Sapendo che $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax+2b}-6}{x} = 1$ determinare i valori di a e b.

Dato che $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax+2b}-6}{x} = 1$ le funzioni $f(x) = \sqrt{ax+2b} - 6$ e $g(x) = x$ sono infinitesimi equivalenti, perciò:

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{ax+2b} - 6\right) = \sqrt{2b} - 6 \\ \lim_{x\to 0} x = 0 \\ \lim_{x\to 0}\left(\sqrt{ax+2b} - 6\right) = \lim_{x\to 0} x \end{cases} \Rightarrow \quad \sqrt{2b} - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{b = 18}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax+36}-6}{x} \cdot \frac{\sqrt{ax+36}+6}{\sqrt{ax+36}+6} = \lim_{x\to 0} \frac{ax+36-36}{x\left(\sqrt{ax+36}+6\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{a}{\sqrt{ax+36}+6} = \frac{a}{12}$$

Dato che $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax+2b}-6}{x} = 1$, $\frac{a}{12} = 1$, perciò $\boldsymbol{a = 12}$.

Esame di stato liceo scientifico – 2017, sessione ordinaria, quesito 3

8. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\cos x-1)}{\ln(\cos^2 x)}$

Dato che $sen\,(\cos x - 1) \sim \cos x - 1$ e che $\ln(\cos^2 x) = \ln(1-\sin^2 x) \sim -\sin^2 x$, posso risolvere velocemente il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\cos x-1)}{\ln(\cos^2 x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{-\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x} = \mathbf{\frac{1}{2}}$$

Esame di stato liceo scientifico – 2016, sessione straordinaria, quesito 1

9. $\lim_{x\to 6} \frac{6-\sqrt{5x+6}}{x^2-8x+12}$

$$\lim_{x\to 6} \frac{6-\sqrt{5x+6}}{x^2-8x+12} \cdot \frac{6+\sqrt{5x+6}}{6+\sqrt{5x+6}} = \lim_{x\to 6} \frac{36-5x-6}{(x-6)(x-2)\left(6+\sqrt{5x+6}\right)} = \lim_{x\to 6} \frac{-5\,(x-6)}{(x-6)(x-2)\left(6+\sqrt{5x+6}\right)} = -\mathbf{\frac{5}{48}}$$

Esame di stato Liceo scientifico opzione sportiva – 2016, sessione ordinaria, quesito 8

10. Si mostri, senza usare il teorema di L'Hôpital, che: $\lim_{x\to\pi} \frac{e^{\sin x}-e^{\sin\pi}}{x-\pi} = -1$.

Dato che, per gli archi associati, $\sin(\pi - x) = \sin x$, $e^{\sin x} - e^{\sin \pi} = e^{\sin(\pi - x)} - 1 \sim \sin(\pi - x)$, posso risolvere velocemente il limite:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{e^{\sin x}-e^{\sin\pi}}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin(\pi-x)}{-(\pi-x)} = -\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \mathbf{-1}$$

Esame di stato liceo scientifico corso sperimentale PNI – 2013, sessione ordinaria, quesito 8

11. Si calcoli $\lim_{x\to 0^+} \frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2}$.

Dato che $2^{3x} - 1 \sim 3x\ln 2$ e che $3^{4x} - 1 \sim 4x \ln 3$, posso risolvere velocemente il limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2^{3x}-1-(3^{4x}-1)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x\ln 2 - 4x\ln 3}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\,(\ln 8 - \ln 81)}{x^2} = \ln\frac{8}{81}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = -\infty$$

Il risultato è negativo, perché $\ln\frac{8}{81} < 0$.

OPPURE:

Senza gli infinitesimi equivalenti, posso procedere con un cambio di variabile:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2^{3x}-3^{4x}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3^{4x}\left(\left(\frac{2^3}{3^4}\right)^x - 1\right)}{x^2}$$

$$Pongo: \left(\frac{2^3}{3^4}\right)^x - 1 = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{8}{81}\right)^x = 1 + \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad x = \log_{\frac{8}{81}}\left(1+\frac{1}{y}\right)$$

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\log_{\frac{8}{81}}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y} \cdot \lim_{x\to 0^+}\frac{3^{4x}}{x} = \frac{1}{\log_{\frac{8}{81}} e} \cdot \lim_{x\to 0^+}\frac{3^{4x}}{x} = \ln\frac{8}{81} \cdot \lim_{x\to 0^+}\frac{3^{4x}}{x} = -\infty$$

Esame di stato liceo scientifico corso sperimentale PNI – 2012, sessione ordinaria, quesito 1

12. Traccia il grafico probabile di **una** delle seguenti funzioni: $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-5x+6}$ $\quad g(x) = \ln\frac{x-1}{\sqrt{x+5}}$

$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-5x+6}$ funzione algebrica razionale fratta

1. Dominio: $x^2 - 5x + 6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)(x-3) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{D = (-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)}$

2. Simmetrie: visto che il dominio non è simmetrico rispetto all'asse y, **la funzione non è né pari né dispari**

3. Intersezione con gli assi:

$$asse\ x: \begin{cases} y = \dfrac{x^3-1}{x^2-5x+6} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \boldsymbol{A(1; 0)} \qquad asse\ y: \begin{cases} y = \dfrac{x^3-1}{x^2-5x+6} \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{1}{6} \end{cases} \quad \boldsymbol{B\left(0; -\frac{1}{6}\right)}$$

4. $\frac{x^3-1}{x^2-5x+6} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-2)(x-3)} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} > 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{1 < x < 2 \ \vee \ x > 3}$

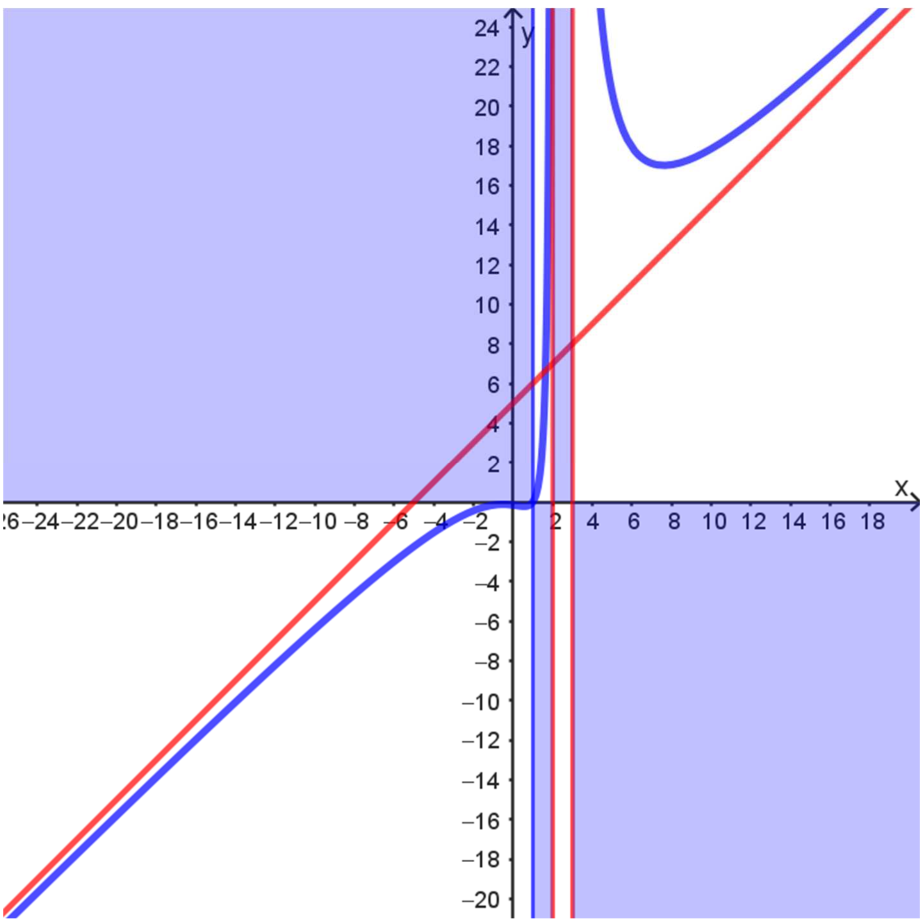
5. Limiti ai confini del dominio:

$$\lim_{x\to 2^\pm} \frac{x^3-1}{(x-2)(x-3)} = \mp\infty \quad \boldsymbol{x = 2\ as. verticale} \qquad \lim_{x\to 3^\pm} \frac{x^3-1}{(x-2)(x-3)} = \pm\infty \quad \boldsymbol{x = 3\ as. verticale}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-1}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \pm\infty \qquad potrebbe\ esistere\ un\ asintoto\ obliquo$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-1}{x(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1 \qquad q = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3-1}{x^2-5x+6} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2-6x-1}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2}{x^2} = 5$$

quindi $\boldsymbol{y = x + 5}$ è un asintoto obliquo.

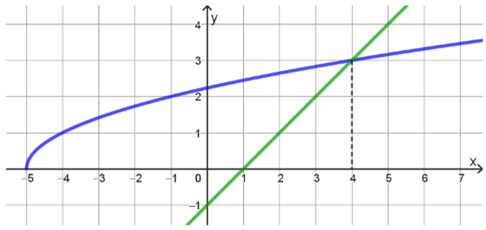


$g(x) = \ln \frac{x-1}{\sqrt{x+5}}$ funzione trascendente

1. Dominio: $\begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x+5}} > 0 \\ x+5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ x > -5 \end{cases} \Rightarrow x > 1 \Rightarrow \boldsymbol{D = (1;\ +\infty)}$

2. Simmetrie: **la funzione non è né pari né dispari**

3. Intersezione con gli assi: non con l'asse y, che è escluso dal dominio



$asse\ x$: $\begin{cases} y = \ln \dfrac{x-1}{\sqrt{x+5}} \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+5}} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ $x - 1 = \sqrt{x+5}$ $\boldsymbol{A(4; 0)}$

4. $\ln \frac{x-1}{\sqrt{x+5}} > 0 \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x+5}} > 1 \Rightarrow x - 1 > \sqrt{x+5} \Rightarrow \boldsymbol{x > 4}$

5. Limiti ai confini del dominio:

$$\lim_{x\to1^+} \ln \frac{x-1}{\sqrt{x+5}} = -\infty \qquad \boldsymbol{x = 1\ as. verticale}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln \frac{x-1}{\sqrt{x+5}} = +\infty \qquad potrebbe\ esistere\ un\ asintoto\ obliquo$$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln \frac{x-1}{\sqrt{x+5}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x-1)}{x} - \frac{\ln(x+5)}{2x} \right) = 0$$

quindi ***non esiste*** è un asintoto obliquo.