1. $D\left(2x\sqrt{x}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{x\sqrt{x}}+2x^6-3\right)$

$=D\left(2x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}+2x^6-3\right)=2\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+12x^5=\mathbf{3\sqrt{x}-\frac{1}{8\sqrt{x}}+12x^5}$

2. $D(x\tan^2 x+x\ln^2 x)$

$=\tan^2 x+x\cdot 2\tan x\,(1+\tan^2 x)+\ln^2 x+x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\mathbf{\tan x\ (\tan x+2x+2x\tan^2 x)+\ln^2 x+2\ln x}$

3. $D\left(\frac{1}{2}(2-\ln x)^2\right)$

$=\frac{1}{2}\cdot 2(2-\ln x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)=\boldsymbol{\frac{\ln x-2}{x}}$

4. $D\frac{x^3+2x+2}{x+1}$

$=D\left(\frac{x^3}{x+1}+2\right)=\frac{3x^2(x+1)-x^3}{(x+1)^2}=\mathbf{\frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2}}$

5. $D\left(\tan^2 x-\frac{1}{\cos x}\right)$

$=2\tan x\,(1+\tan^2 x)-\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos x}\left(2+\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos x}\right)=\mathbf{\frac{\sin x\,(2-\cos x)}{\cos^3 x}}$

6. $D[(x+x^3)\arctan x]$

$=(1+3x^2)\arctan x+x(1+x^2)\cdot\frac{1}{1+x^2}=\mathbf{(1+3x^2)\arctan x+x}$

7. $D\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

$=\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\cdot\frac{\sin x\,(1+\cos x)+\sin x\,(1-\cos x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{2\sin x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\frac{2\sin x}{\sin^2 x}=\boldsymbol{\frac{2}{\sin x}}$

8. Data la famiglia di funzioni $y=-x^3+6kx+33$, trovare la funzione tangente nel punto di ascissa 3 ad una retta parallela alla bisettrice del primo quadrante. Determinare l'equazione di detta tangente.

Determino il coefficiente angolare della tangente alla funzione nel punto di ascissa 3, calcolando la derivata nel punto 3 e ponendola uguale al coefficiente angolare della bisettrice del primo quadrante, ovvero 1: $f'(x)=-3x^2+6k$ $\quad -27+6k=1$ $\quad k=\frac{14}{3}$

Determino le coordinate del punto di tangenza: $f(x)=-x^3+28x+33$ $\quad f(3)=-27+84+33=90$

Ricavo l'equazione della retta tangente: $y-90=x-3$ $\quad \mathbf{y=x+87}$

Esame di stato liceo scientifico e opzione scienze applicate – 2015, sessione suppletiva, quesito 2

9. Sia $f(x)=\sin x+\cos x$. Determinare $f^{2017}(x)$, esplicitando, in modo chiaro ed esauriente, il procedimento seguito.

Calcolo alcune derivate successive: $f'(x)=\cos x-\sin x$ $\quad f''(x)=-\sin x-\cos x$ $\quad f'''(x)=-\cos x+\sin x$ $\quad f^{IV}(x)=\sin x+\cos x$

Le altre derivate, a rotazione, saranno uguali a quelle appena trovate, procedendo ciclicamente, perciò, dato che: $2017=4\cdot 504+1$

Posso calcolare la derivata richiesta: $f^{2017}=f'(x)=\mathbf{\cos x-\sin x}$

Esame di stato liceo scientifico e opzione scienze applicate – 2017, sessione suppletiva, quesito 5

10. Determinare l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = \sqrt{25 - x^2}$ nel suo punto di ascissa 3, utilizzando due metodi diversi.

Procedo con le derivate:

Calcolo la derivata prima della funzione: $y' = \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$

Calcolo la derivata prima per l'ascissa 3: $y'(3) = -\frac{3}{\sqrt{25 - 9}} = -\frac{3}{4}$

Determino l'ordinata del punto di ascissa 3: $y(3) = \sqrt{25 - 3^2} = 4$

A questo punto posso determinare l'equazione della retta tangente: $y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$ $\quad \boldsymbol{y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}}$

Procedo con la geometria analitica:

Identifico la funzione: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y \geq 0 \end{cases}$ Si tratta di una semicirconferenza di centro O e raggio 5.

Determino il coefficiente angolare del raggio OT, dove T è il punto di tangenza precedentemente trovato, $T(3; 4)$: $m_{OT} = \frac{y_T - y_O}{x_T - x_O} = \frac{4}{3}$

La tangente è perpendicolare al raggio per il punto di tangenza, perciò: $m = -\frac{1}{m_{OT}} = -\frac{3}{4}$

A questo punto posso determinare l'equazione della retta tangente: $y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$ $\quad \boldsymbol{y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}}$

Esame di stato liceo scientifico, opzione scienze applicate e indirizzo sportivo – 2023, sessione ordinaria, quesito 5